



БИБЛИОТЕКА НАНОИНЖЕНЕРИИ

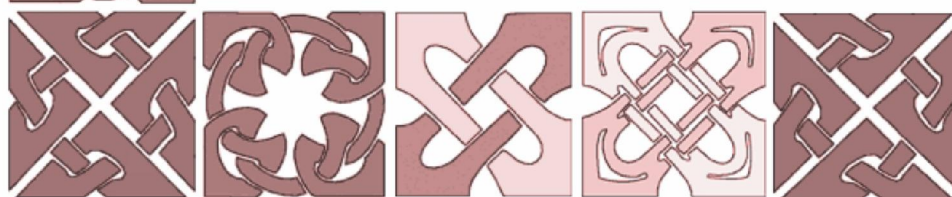
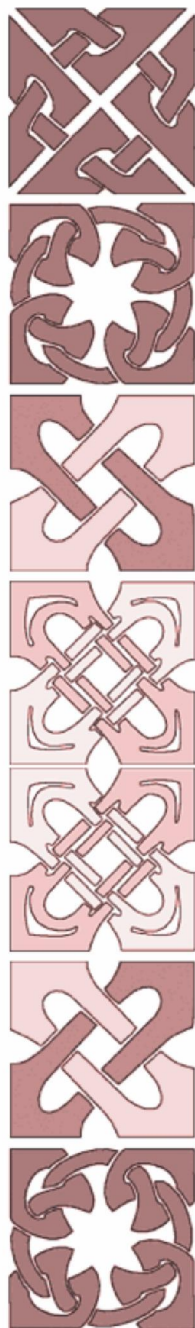
НАЗАРОВ А.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению
домашнего задания
по курсу

«МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Учебно-методический комплекс
для магистров
по профилю подготовки “Наноинженерия”



МГТУ им.Н.Э.Баумана
2009

НАЗАРОВ А.В.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению
домашнего задания
по курсу
«МНОГОМАСШТАБНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ
Член-корреспондента РАН, профессора,
В.А.Шахнова

Комплект
Учебно-методического обучения для подготовки бакалавров и магистров
по программам высшего профессионального образования
направление подготовки «Нанотехнология»
с профилем подготовки «Наноинженерия»

Москва
МГТУ им Н.Э.Баумана
2009

Рецензенты:

Кафедра вакуумной электроники
Московского физико-технического института
(зав. кафедрой академик РАН Бугаев А.С.)
Кафедра «Проектирование и технология производства РЭС»
Владимирского государственного университета
(зав. кафедрой профессор Руфицкий М.В.)

НАЗАРОВ А.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по выполнению домашнего задания
по курсу «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»:
Библиотека Наноинженерии. – М.: МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2008. – 35 с.: ил.

Представлено учебно-методическое обеспечение поддержки подготовки бакалавров и магистров по основным образовательным программам высшего профессионального образования по направлению подготовки «Нанотехнология» с профилем подготовки «Наноинженерия».

Методические указания по выполнению домашнего задания по курсу «Многомасштабное моделирование» содержат описания домашнего задания по курсу, основные теоретические положения и общие методические рекомендации по его выполнению.

Материалы учебно-методического комплекса соответствуют программам подготовки бакалавров/магистров, реализуемым в МГТУ им.Н.Э.Баумана. Разработаны с привлечением и в кооперации с НИИСИ РАН, ИРЭ РАН, РНЦ «Курчатовский институт», ФТИАН РАН и др. предприятиями ННС. Структура и состав учебно-методического обеспечения соответствует требованиям Федеральных законов от 10.07.1992 N 3266-1 «Об образовании» (с изменениями и дополнениями) и от 22.08.1996 N 125-ФЗ «О высшем и послевузовском профессиональном образовании» (с изменениями и дополнениями), Типового положения об образовательном учреждении высшего профессионального образования (высшем учебном заведении), утвержденным постановлением Правительства РФ от 14 февраля 2008 г. N 71.

Для студентов, аспирантов и преподавателей высших технических учебных заведений по направлению подготовки «Нанотехнология» с профилем подготовки «Наноинженерия». Будет полезен всем, занимающимся вопросами нанотехнологий, наноинженерии, проектированием МЭМС и НЭМС, созданием электронных систем различного назначения.

УДК 361.3.06; 621.382

©Коллектив авторов, 2008

©Все права принадлежат Российскому агентству по образованию, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ СОКРАЩЕНИЙ И ТЕРМИНОВ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
1. Методические указания по выполнению домашнего задания	7
1.1 Применение вейвлет анализа в нанотехнологии.	7
1.2 Введение в вейвлеты	8
1.3 Численный вейвлет-анализ простейших временных рядов	13
1.4 Алгоритм вейвлет-анализа временных рядов	16
2. Домашнее задание	
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Варианты заданий	19
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Пример выполнения задания	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	32
ЛИТЕРАТУРА	33

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

НРС	–	Наноразмерная структура
НЭМС	–	Нанoeлектроmеханическая система
ЧЭ	–	Чувствительный элемент
КНИ	–	Кремний-на-изоляторе
ИС	–	Интегральная схема
НПМ	–	Нанопористый материал
ДНК	–	Дизоксирибонуклеиновая кислота
СБИС	–	Сверхбольшие интегральные схемы
МЛЭ	–	Молекулярно-лучевая эпитаксия
СВЧ	–	Сверхвысокие частоты
ЭСМ	–	Электростатическая силовая микроскопия
СЗМ	–	Сканирующая зондовая микроскопия
СТМ	–	Сканирующая туннельная микроскопия
АСМ	–	Атомно-силовая микроскопия
МСМ	–	Магнитно-силовая микроскопия
МПТ	–	Метод постоянного тока
МПВ	–	Метод постоянной высоты
СБОМ	–	Сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия
СИФ	–	Система итерированных функций
СЭМ	–	Сканирующая электронная микроскопия
ПЭМ	–	Просвечивающая электронная микроскопия
МЭМС	–	Микроэлектроmеханическая система
РЭМ	–	Растровая электронная микроскопия
РСМА	–	Рентгеноспектральный микроанализ
СВД	–	Спектрометр волновой дисперсии
УФ	–	Ультрафиолет

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предмет «Многомасштабное моделирование» изучается студентами в течение 5-го семестра. Программа курса предусматривает выполнение в течение семестра студентами, изучающими данный предмет, одного домашнего задания на тему «Вейвлет-анализ динамических процессов в нанотехнологиях».

Дисциплина «Многомасштабное моделирование» освещает методы многомасштабного моделирования состояния и процессов в нанобъектах и наносистемах. Многомасштабное моделирование нанотехнологических объектов является ключом к описанию как нанобъектов, так и макросистем, логически дополняя наноуровнем известный иерархический подход к моделированию исследуемого технического объекта (ИТО) на мезо-, микро-, макро- и мета- уровнях. Многомасштабное моделирование опирается на широко распространенные в современных САПР методы конечных разностей, Монте-Карло, конечных и граничных элементов. Студенты знакомятся с методами сопряжения различных пространственных и временных масштабов наноструктур и молекулярного конструирования, изучают возможности численного эксперимента и практические примеры молекулярного моделирования наноструктур (молекулярных машин), способы их включения в более высокие иерархические уровни моделирования исследуемого объекта.

Постоянное усложнение разработок в области нанотехнологий приводит к тому, что подготовка бакалавров и магистров по Наноинженерии должна помимо широкой теоретической базы предусматривать наличие практических навыков использования современных средств 3D проектирования наносистем. К программам подготовки и переподготовки бакалавров и магистров для нужд Наноинженерии относятся следующие:

- программа подготовки бакалавров и магистров по направлению 554500 – «Нанотехнология» с профилем подготовки «Наноинженерия»,
- программа подготовка дипломированных специалистов по направлению 658300 – «Нанотехнология» с профилем подготовки «Наноинженерия».

Важной проблемой в наноинженерии является выбор моделей, адекватно отражающих поведение нано размерных элементов на различных уровнях иерархии проектирования наносистем. В этой связи, на этапе анализа результатов моделирования целесообразно применять альтернативные интегрированные системы автоматизированного проектирования, позволяющие выполнять диагностику и анализ различных проектных решений на указанных уровнях.

Таким образом, методологически дисциплина строится на основе оптимального соотношения теоретических и прикладных вопросов с обязательным участием студентов в самостоятельном решении частных задач многомасштабного моделирования наносистем путем написания и отладки оригинальных прикладных программ.

В составе дисциплины «Многомасштабное моделирование» предусмотрены теоретические разделы, по которым имеются доступные учебно-методические документы и учебная литература, изучаемые студентами самостоятельно под контролем преподавателя. Содержание соответствующих тем разделов направлено на усиление роли фундаментальных знаний в теоретической и профессиональной подготовке студента и способствует формированию фундаментальных системных знаний и развитию творческих способностей.

1. Методические указания по выполнению домашнего задания

1.1 Применение вейвлет анализа в нанотехнологии.

Многомасштабные разложения широко используются в тех случаях, когда решение физической задачи не сводится к монохроматической волне или к устойчивому стационарному решению. В простейшем случае многомасштабность появляется уже в классической механике, когда решение системы гамильтоновых уравнений приводит к спектру из нескольких отличных друг от друга собственных частот.

При описании реальных наносистем с большим числом степеней свободы точное описание всех нелинейных взаимодействий, становится не возможным. Это приводит к необходимости перехода от детерминистического описания процессов с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) к описанию в рамках стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), в которых неизвестные взаимодействия системы с флуктуирующей средой и сложные нелинейные эффекты взаимодействия внутренних степеней свободы описываются с помощью случайных сил. Такое описание характерно для задач квантовой теории поля (КТП), в которых выполняется закон сохранения энергии, однако необходимость интегрирования по всем конечным квантовым состояниям, обусловленная вероятностной сущностью квантовой механики, приводит к эквивалентности квантовополевой задачи описанию некоторого случайного процесса в пространстве большей размерности.

Простым случаем применения многомасштабного разложения является разложение в ряд Фурье. Однако, его использование для нелинейных систем весьма ограничено. Разложение в ряд (или интеграл) Фурье оправдано лишь в случае, когда сама физическая система однородна, т.е. инвариантна относительно возмущений. Во всех остальных случаях приходится применять различные дополнительные приемы: разложение по малому параметру, методы ренормализационной группы (РГ), вейвлет-разложение.

Сегодня известна масса статей и монографий, посвященных применению вейвлет-преобразования к анализу сигналов и экспериментальных данных, численному решению дифференциальных уравнений и численному моделированию случайных процессов, использование вейвлет-преобразования для аналитического описания нелинейных систем и квантовополевых моделей пока не нашло широкого применения.

На вейвлет-преобразованиях основывается многомасштабная процедура стохастического квантования. Известен ряд работ по применению вейвлет-анализа к моделированию квантовых иерархических систем. Кроме того, непрерывное вейвлет-преобразование может использоваться для представления квантовых полей и случайных процессов в виде суперпозиции флуктуации различных масштабов, а также – для задания корреляционных свойств соответствующих случайных процессов.

В работах [] показана реальная возможность использования вейвлетов для выявления характерных масштабов пространственной структуры нанопленок [13, 14].

В квантовой физике вейвлет анализ успешно применяется для решения задач исследования сигналов магнитотуннельной и дальней тонкой структуры рентгеновских спектров поглощения урана [M.V. Chukalina, Yu.V. Dubrovskii, V.A. Volkov, L.Eaves, D.Yu. Ivanov, E.E. Vdovin, J.-C. Portal, D.K.Maude, M. Henini, and G. Hill, *Proc. Conf. «Nanostructures: Physics and Technology»* (2003), p. 183.].

В работе [Рехвиашвили С.Ш. Применение вейвлет-преобразования для обработки изображений в атомно силовом микроскопе] вейвлеты использованы для обработки АСМ-изображений. В частности, здесь предложено использовать вейвлет-преобразование произвольного сигнала по солитоноподобным функциям (базовым вейвлетам), что обеспечивает двумерную развертку соответствующего спектра по координате и частоте. Для покрытия всего сигнала короткими вейвлетами используются процедуры сдвига и масштабного преобразования. В итоге сигнал представляется совокупностью параметрических «вейвлет волн» от частоты (масштаба) и координаты (сдвига).

1.2 Введение в вейвлеты

От Фурье-анализа к вейвлетам. Классический анализ Фурье основан на возможности исследования функций во временной ($|t| < \infty$) и частотной ($|v| < \infty$) областях с помощью прямого (1) и обратного (2) преобразований Фурье:

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi vt} dt \quad (1)$$

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi vt} dv \quad (2)$$

Например, для функции (3) преобразование Фурье имеет вид (4):

$$f(t) = A \cos(2\pi v_0 t) \quad (3) \quad f(v) = A\pi [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)] \quad (4)$$

где $\delta(v)$ – дельта-функция.

Этот пример демонстрирует способность преобразования Фурье фокусировать в точку «размазанную» по времени информацию о периодичности функции при переходе из временной области в частотную. Достигается это за счет того, что ядро ($e^{-i2\pi vt}$) преобразования Фурье не локализовано во времени, но имеет предельную локализацию в частотной области. Это обстоятельство и делает преобразование Фурье хорошим инструментом для изучения стационарных процессов (в нашем примере стационарность обеспечивается условиями $A = \text{const}$ и $v_0 = \text{const}$).

Однако именно это обстоятельство делает преобразование Фурье недостаточным для исследования функций, характеристики которых меняются во времени. Например, преобразование Фурье не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с частотами $v_1 = 0.062$ и $v_2 = 0.105$ Гц; (рис.1-а), от сигнала, состоящего из тех же синусоид, но включающихся последовательно (рис.1-б). Спектры Фурье для них совпадают же (рис.1-в)

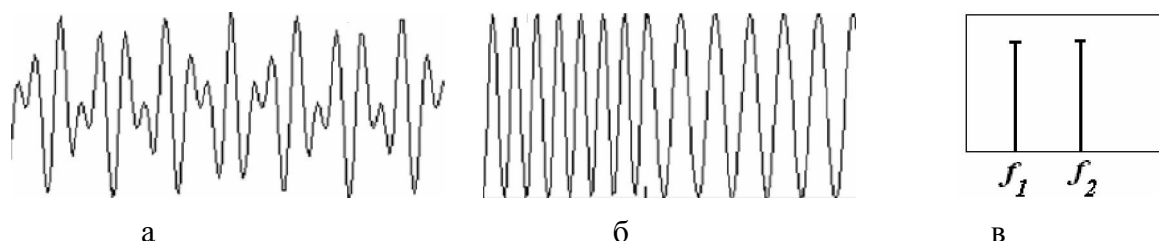


Рис.1. Сигналы из суммы (а) и последовательности (б) синусоид и их спектр (в)

Для устранения этого недостатка преобразование Фурье локализуют на промежутках конечной длины, вычисляя оценки спектра мощности не только по всей длине временного ряда, но и по его различным частям. Формализация такого подхода может быть описана, например, с помощью оконного преобразования Гэбора:

$$GT(v, b, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(t-b)^2}{\alpha^2}} e^{-i2\pi vt} dt \quad (5)$$

Сравнивая выражения (5) и (1), видим, что введенное под знак интеграла временное окно $e^{-\frac{(t-b)^2}{\alpha^2}}$ выделяет лишь небольшой отрезок исходного временного ряда с центром в произвольной точке b и, тем самым, позволяет получить эволюцию спектра во времени, что ясно видно из рис.2, на котором показана зависимость квадрата модуля оконного преобразования как функции частоты и времени при $\alpha = 10$.

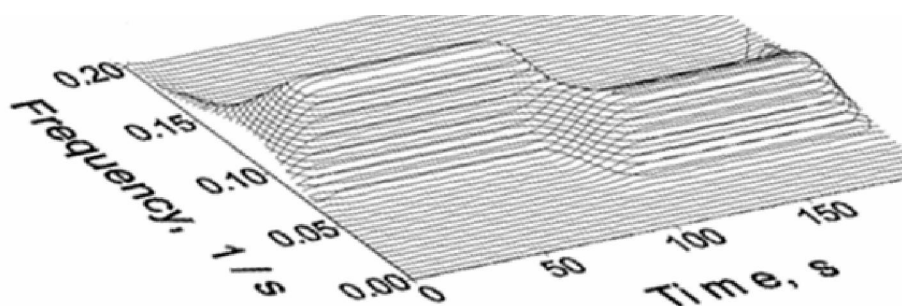


Рис.2. График квадрата модуля преобразования Гэбора при $\alpha = 10$

Здесь важно подчеркнуть, что окно преобразования Гэбора имеет постоянную ширину, которая определяется параметром α . Эффективная ширина окна определяет длину интервала ΔT , который дает главный вклад в значение интеграла в выражении (5). Длина ΔT является мерой временного разрешения, в то время как ширина спектральной линии $\Delta \nu$ определяет меру частотного разрешения. Известно, что обе эти характеристики связаны между собой соотношением: $\Delta \nu \propto 1/\Delta T$, которое показывает, что естественное для анализа нерегулярных сигналов стремление повысить временное разрешение всегда приводит к уменьшению разрешающей способности в области частот. К этому следует добавить, что при использовании преобразования Гэбора возникает *проблема выбора ширины* окна во временной области. Слишком широкое окно может обеспечить разумное представление низкочастотных компонентов ряда, но его ширина будет избыточной для гармоник с высокой частотой, поскольку все интересные нерегулярности в высокочастотной области спектра сгладятся. Наоборот, достаточно узкое окно даст возможность изучить вариации во времени высокочастотных компонентов, но оно не будет адекватным для низкочастотных гармоник.

Если сделать оконную функцию зависящей от частоты так, чтобы для низких частот окно становилось шире, а для высоких – уже, то оконное преобразование Фурье переходит в новый класс преобразований, который и получил название *вейвлет-преобразования*. Термин «вейвлет» происходит от английского слова *wavelet*, буквальный перевод которого означает маленькая волна (сравните *booklet*, *starlet*). Хорошим аналогом в русском языке является слово *всплеск*. Переход от слова «волна» (*wave*) к слову «всплеск» (*wavelet*) отражает суть перехода от преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию.

Преобразование Фурье – это корреляция между исходным рядом (рис.2–а) и волной (рис.2–б). Волна характеризуется значением частоты, поэтому преобразование Фурье является функцией одной переменной – частоты. Вейвлет-преобразование – это корреляция между исходным рядом (рис.2–а) и всплеском (рис.2–в). Вейвлет (всплеск) характеризуется масштабом и локализацией на оси времени, поэтому вейвлет-преобразование зависит от двух аргументов – масштаба вейвлета и его положения на оси времени

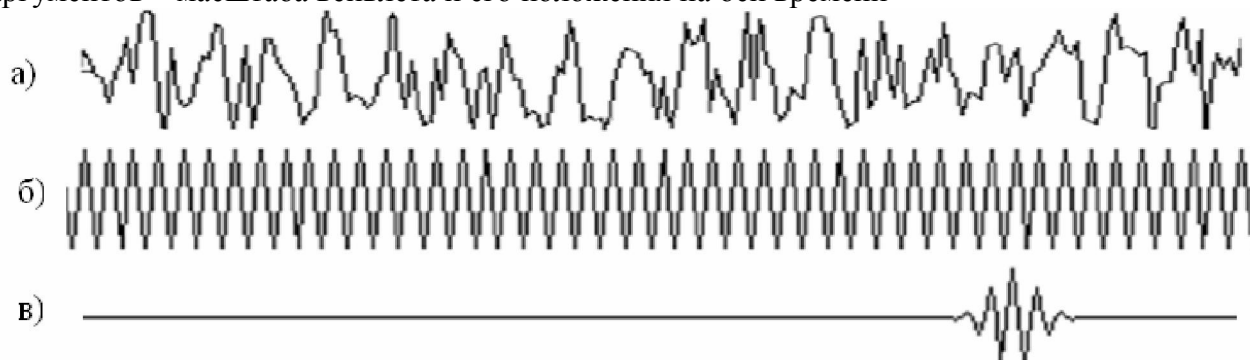


Рис. 2. Волны и всплески.

Вейвлет-преобразование не просто «режет» исследуемый объект на куски, а выделяет из него компоненты разных масштабов и каждый компонент анализируется с той степенью детальности, которая соответствует его масштабу.

Основные определения вейвлет-анализа. Интегральным вейвлет-преобразованием функции $f(t) \in L^2(R)$ называется выражение:

$$W(a, b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (6)$$

в котором функция $\psi^*(t)$ называется *материнским вейвлетом*, а символом $*$ обозначена процедура комплексного сопряжения.

Параметр a определяет размер вейвлета и называется *масштабом (scale)*. Его аналогом в Фурье-анализе является период (частота) гармонического колебания. Следует сказать, что понятие *масштаба* – более широкое (хотя и менее наглядное), чем понятие периода. Связано это с тем, что в Фурье-преобразовании функциональный вид ядра преобразования зафиксирован раз и навсегда, в то время как вейвлет-преобразование одной и той же функции можно получить с помощью различных базисных вейвлетов (т. е. в разных системах масштабов). Параметр b задает временную локализацию вейвлета и называется *сдвигом (shift)*. Этот параметр не имеет аналога в Фурье-преобразовании.

Обратное интегральное вейвлет-преобразование задается выражением

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a, b) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{1}{a^{1/2}} \frac{da db}{a^2}$$

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty \quad (7)$$

где: C_{ψ} – нормирующий коэффициент:

Пространством $L^2(R)$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций, интегрируемых на множестве R с квадратом.

Частотно-временная локализация. Как было сказано выше, частотно-временная локализация является характерной особенностью анализирующих вейвлетов. Это означает, что вейвлеты $\psi(t)$ и их преобразования Фурье $\hat{\psi}(\omega)$ существенно отличаются от нуля лишь на малых интервалах времени и частоты и очень мало отличаются от нуля (или просто равны нулю) вне этих интервалов. Количественной мерой локализации функции $z(t) \in L^2(R)$ могут служить ее центр $\langle t \rangle$ (выражение 8) и радиус Δ_t (выражение 9):

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\|z\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt \quad (8)$$

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|z\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} [t - \langle t \rangle]^2 |z(t)|^2 dt \quad (9)$$

При этом эффективная ширина вейвлета принимается равной $2\Delta_t$.

Нулевые моменты. Для обеспечения обратимости вейвлет-преобразования, вейвлет должен удовлетворять соотношению (7). Это обеспечивается условием (10) откуда следует (11). Для приложений бывает важно, чтобы не только нулевой момент, но и m старших моментов были равны нулю (12).

$$\hat{\psi}(0) = 0 \quad (10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) t^m dt = 0 \quad (12)$$

Вейвлеты, обладающие таким свойством, оказываются *полезными* при анализе временных рядов с полиномиальными трендами. Игнорируя тренд, они сразу позволяют исследовать высокочастотные компоненты ряда.

Примеры вейвлетов. Известны многочисленные семейства вейвлетообразующих функций. Здесь рассмотрим два основных: *МНАТ – вейвлет* и *вейвлет Морле*.

МНАТ-вейвлет получается двукратным дифференцированием функции Гаусса:

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = (1 - t^2) e^{-t^2/2} \quad (13)$$

Преобразование Фурье этого вейвлета имеет вид

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} \omega^2 e^{-\omega^2/2} \quad (14)$$

Графики этих функций показаны на рис. 3. Название этого вейвлета МНАТ (Mexican HAT) произошло от характерного вида его графика, напоминающего сомbrero.

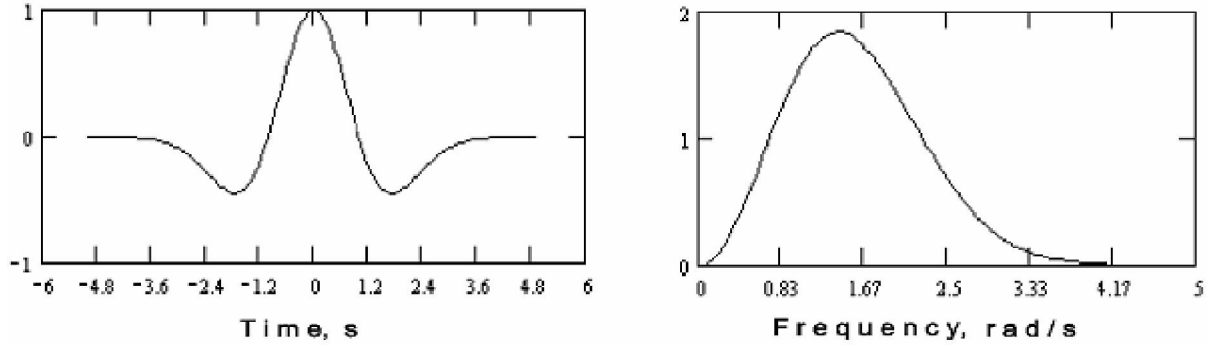


Рис. 3: Вейвлет МНАТ (слева) и его преобразование Фурье (справа).

МНАТ-вейвлеты хорошо локализованы как во временной, так и в частотной областях. Центры и радиусы локализации в обеих областях имеют следующие значения: $\langle t \rangle = 0$, $\Delta_t = 1,08$ и $\langle \omega \rangle = 1,51$, $\Delta_\omega = 0,49$. Отметим также, что МНАТ-вейвлет имеет нулевые значения нулевого и первого моментов.

Вейвлет Морле. Вейвлет Морле – это плоская волна, модулированная гауссианой. Его аналитическое представление и преобразования Фурье задаются следующими выражениями:

$$\psi(t) = e^{-t^2/\alpha^2} [e^{ik_0 t} - e^{-k_0^2 \alpha^2/4}] \quad \hat{\psi}(\omega) = \alpha \sqrt{\pi} [e^{-\alpha^2(k_0 - \omega)^2/4} - e^{-\alpha^2(k_0 + \omega)^2/4}]$$

Параметр α задает ширину гауссианы, параметр k_0 – частоту плоской волны. Обычно выбирают $\alpha^2 = 2$ и $k_0 = 2\pi$. При этих значениях с достаточной точностью можно принять:

$$\psi(t) = e^{-t^2/\alpha^2} e^{i 2\pi t}, \quad \text{и} \quad \hat{\psi}(\omega) = \alpha \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2 (2\pi - \omega)^2/4}. \quad (15)$$

Графики этих функций показаны на рис. 4.

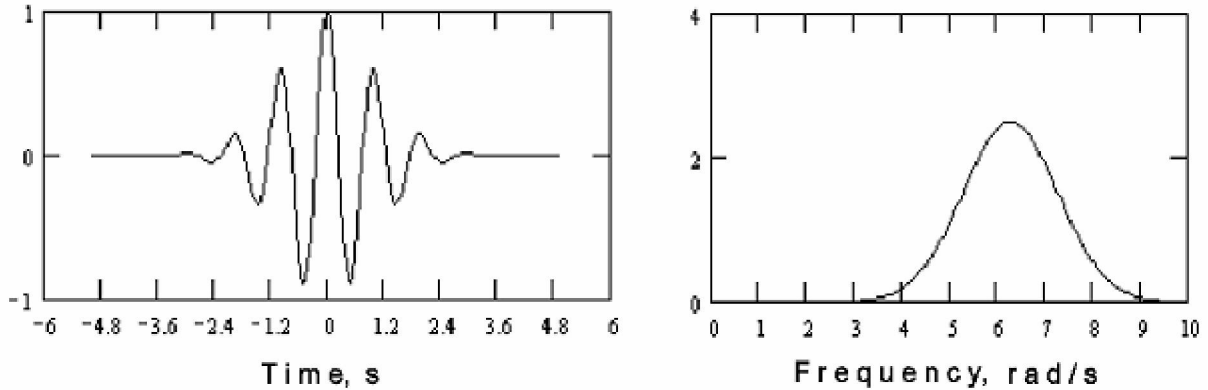


Рис.4. Вещественная часть (слева) и преобразование Фурье (справа) вейвлета Морле.

Центр и радиус локализации вейвлета Морле во временной области определяются значениями: $\langle t \rangle = 0$, $\Delta_t = \alpha/2$. Получить аналогичные оценки в аналитическом виде для частотной области трудно. Отметим также, что у вейвлета Морле равен нулю лишь нулевой момент.

Вейвлет-преобразование как фильтрация. Обычно, фильтрацией называют такое преобразование исходной функции, которое приводит к изменению ее спектрального состава. Зададим фильтр функции $f(t)$ с помощью свертки

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') f(t - t') dt' \quad (16)$$

где $h(t)$ – весовая функция фильтра, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1 \quad (17)$$

Преобразуя (16) по Фурье, получаем: $\hat{\phi}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega)$. В этом равенстве $\hat{h}(\omega)$ – передаточная функция фильтра (16), которая является Фурье-образом весовой функции:

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

Например, для ступенчатой весовой функции:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

передаточная функция имеет вид

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sin(T\omega)}{T\omega} \quad (18)$$

В общем случае из (17) следует $\hat{h}(0) = 1$. Таким образом, оператор (16) задает низкочастотную фильтрацию. Отметим, что ширина пропускания передаточной функции (18) определяется только длиной весовой функции фильтра, т. е. значением параметра T .

Сравнивая преобразования (6) и (16), мы видим, что интегральное вейвлет-преобразование (6) можно также считать фильтром исходной функции $f(t)$. Применяя к (6) преобразование Фурье по переменной b , получаем:

$$\hat{W}(a, \omega) = \sqrt{a} \hat{\psi}^*(a\omega) \hat{f}(\omega) \quad (19)$$

откуда видно, что передаточная функция вейвлет-преобразования имеет вид:

$$H(\omega) = \sqrt{a} \hat{\psi}^*(a\omega) \quad (20)$$

В силу (10) из последнего равенства имеем: $H(0) = 0$. К этому надо добавить, что для каждого значения масштаба $a > 0$ максимум функции $H(\omega)$ лежит на частоте $\omega_{max} = C/a$, где величина C зависит от взятого вейвлета (например, для МНАТ вейвлет: $C = \sqrt{2}$, для вейвлета Морле $C = k_0 = 2\pi$). Кроме того, эффективная ширина функции $H(\omega)$ убывает с ростом масштаба a . Другими словами, вейвлет-преобразование – это полосовой фильтр с переменной шириной полосы пропускания: узкой для больших масштабов и широкой – для малых.

Сравнение передаточных функций (18) и (20) показано на рис. 5. На рис.5 (слева) показана передаточная функция низкочастотного фильтра (18) при $T = 1$ (штриховая линия) и при $T = 2$ (сплошная линия). Справа на том же рисунке показана передаточная функция (20) полосового фильтра вейвлет-преобразования МНАТ при $a = 0,25$ (сплошная линия) и при $a = 1$ (штриховая линия).

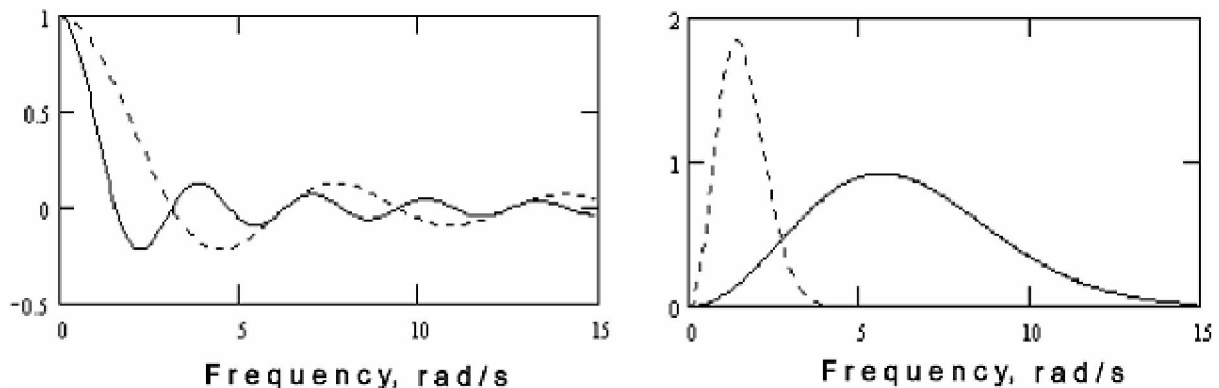


Рис. 5. Передаточные функции фильтров (18) – слева, и (20) – справа

Таким образом, для каждого значения масштабного коэффициента $a > 0$ величины $W(a, b)$, определенные с помощью вейвлет преобразования (6), представляют собой результат фильтрации исходной функции в диапазоне частот, центр которого определяется значением масштабного коэффициента, а размер – свойствами принятого анализирующего вейвлета.

Спектральные характеристики. Будем считать, что функции $f(t)$ и $\hat{f}(\omega)$ связаны между собой соотношениями Фурье (1) и (2). В этом случае справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, называется *энергией сигнала* $f(t)$. На этом основании величину

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (21)$$

называют *плотностью спектра энергии*. Можно показать, что для вейвлет-преобразования существует аналог равенства Парсеваля, который имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}$$

Поэтому величину $E(a, b) = |W(a, b)|^2$ уместно также назвать плотностью спектра энергии, однако, в отличие от (21), величина $E(a, b)$ определяет спектральную характеристику не только для заданного масштаба, но и для параметра сдвига b . По этой причине ее называют *локальным спектром энергии*. В противоположность этому величину:

$$E_w(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b)|^2 db$$

называют *глобальным спектром энергии*. Эта характеристика показывает распределение энергии по масштабам и является аналогом плотности спектра энергии $E(\omega)$: Можно показать, что обе эти характеристики связаны между собой следующим соотношением:

$$E_w(a) = a \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \quad (22)$$

Другими словами, глобальный спектр энергии есть плотность спектра энергии, сглаженная на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

1.3 Численный вейвлет-анализ простейших временных рядов

Скалограмма и скейлограмма. Введенными выше определениями интегрального вейвлет-преобразования, локального и глобального энергетического спектра нельзя воспользоваться на практике, поскольку при обработке результатов измерений основными объектами преобразования являются не функции, заданные на всей оси времени, а временные ряды, длина которых всегда конечна. По этой причине вместо указанных выше теоретических понятий следует ввести их практические аналоги (оценки).

Будем считать, что временной ряд задан значениями функции, следующими друг за другом с постоянным шагом Δt : $f_k = f(t_k)$, $t_k = \Delta t k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Для оценки вейвлет-преобразования этой последовательности воспользуемся следующим выражением:

$$W_A(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \psi^* \left(\frac{t_k - b}{a} \right) \quad (23)$$

где

$$n(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{1}{B} \left(\frac{t_k - b}{a} \right)^2 \right]$$

причем $B = 2$ для МНАТ-вейвлета и $B = a^2$ для вейвлета Морле. При переходе от (6) к (23) мы убрали из знаменателя формулы (6) множитель $a^{1/2}$, заменив его выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{B} \left(\frac{t - b}{a} \right)^2 \right] dt = a \sqrt{B\pi} \quad (24)$$

Этим самым была устранена зависимость амплитуд гармонических компонентов от параметра a , что обычно мешает правильно оценить их относительные интенсивности по графическому представлению вейвлет-спектров. Кроме того, функция $n(a, b)$ как аппроксимация (24) позволяет «уравнять» для различных значений масштабного коэффициента a число отсчетов исходной функции, участвующее в вычислении. Оценка (23) называется *амплитудной*

вейвлет-функцией. Эта функция вычисляется на дискретном множестве значений аргументов a_i и a_j , $i=0, \dots, N_a-1$; $j=0, \dots, N_b-1$. Конкретные способы дискретизации параметров a и b обсуждаются подробно в пункте 8 основного алгоритма.

Используя (23), введем оценку локального спектра энергии

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2 \quad (25)$$

Функцию (25) обычно называют скалограммой (scalogram), подчеркивая тем самым ее способность описывать распределение энергии по масштабам. Поскольку это распределение локализовано во времени с помощью параметра сдвига b , уместно называть (25) *локальной скалограммой*, однако такой термин не нашел широкого распространения. На основе (25) можно ввести оценку глобального спектра энергии:

$$G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j) \quad (26)$$

где N^* – число точек осреднения (см. пункт 13 основного алгоритма). Функция (26) называется *скейлограммой* (scalegram). В силу соотношения (22) скейлограмма в вейвлет-анализе является прямым аналогом сглаженной периодограммы в Фурье-анализе.

Вейвлет-преобразование синусоиды. Фурье- и вейвлет-анализ временных рядов основаны на переводе имеющейся информации из временной области в частотную область или область, задаваемую параметрами a и b вейвлет-преобразования. При анализе полигармонических функций необходимо знать, какой вид будет иметь простая синусоида в этих областях. В Фурье-анализе показывается, что образом синусоиды в периодограмме Шустера является спектральная линия, размер и форма которой определяются длиной ряда и расположением точек внутри него. Изучим аналогичную ситуацию в вейвлет-анализе. Для этого рассмотрим синусоиду (27) и ее Фурье-образ (28)

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t) = \frac{A}{2i} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] \quad (27) \quad \hat{f}(\omega) = A \frac{\pi}{i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (28)$$

Применим к (27) обратное преобразование Фурье:

$$W(a, b) = A \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^*(a\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (29)$$

Подстановка (27) в (29) дает

$$W(a, b) = A \frac{\sqrt{a}}{2i} \left[e^{i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(a\omega_0) - e^{-i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(-a\omega_0) \right] \quad (30)$$

В случаях, когда функция $\hat{\psi}(\omega)$ действительная и четная, выражение (29) упрощается:

$$W(a, b) = A \sqrt{a} \hat{\psi}(a\omega_0) \sin(\omega_0 b) \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) соответствуют определению непрерывного вейвлет преобразования (6). Численные оценки выполняются по формуле (23). С учетом описанных обстоятельств вывода формулы (23) выражения (30) и (31) следует переписать следующим образом:

$$W_A(a, b) = \frac{A}{2i\sqrt{B}\pi} \left[e^{i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(a\omega_0) - e^{-i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(-a\omega_0) \right] \quad (32)$$

$$W_A(a, b) = \frac{A}{\sqrt{B}\pi} \hat{\psi}(a\omega_0) \sin(\omega_0 b) \quad (33)$$

где $B = 2$ для МНАТ-вейвлета и $B = \alpha^2$ для вейвлета Морле. Рассмотрим теперь эти формулы для конкретных вейвлетов.

МНАТ-вейвлет. Подставляя (14) в (33), получаем

$$W_A(a, b) = A a^2 \omega_0^2 e^{-a^2 \omega_0^2 / 2} \sin \omega_0 b \quad (34)$$

$$S(a, b) = A^2 a^4 \omega_0^4 e^{-a^2 \omega_0^2} \sin^2 \omega_0 b \quad (35)$$

Мы видим, что при фиксированном значении частоты ω_0 нашей синусоиды ее МНАТ-преобразование есть синусоида той же частоты с амплитудой, зависящей от текущего значения масштабного коэффициента. Приравнивая к нулю результаты дифференцирования функций (34) и (35) по параметру a , найдем их максимумы по шкале масштабов: $a_{\max} \omega_0 = \sqrt{2}$, откуда для периода $P_0 = 2\pi/\omega_0$ находим: $P_0 = \pi \sqrt{2} a_{\max} \approx 4.44 a_{\max}$.

Вейвлет Морле Подставляя (15) в (33), получаем:

$$W_A(a, b) = \frac{A}{2i} \left[e^{i\omega_0 b} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(2\pi - a\omega_0)^2} - e^{-i\omega_0 b} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(2\pi + a\omega_0)^2} \right]$$

$$S(a, b) = \frac{A^2}{4} \left[e^{-\frac{\alpha^2}{2}(2\pi - a\omega_0)^2} + e^{-\frac{\alpha^2}{2}(2\pi + a\omega_0)^2} \right]$$

В отличие от предыдущего случая видим, что локальный спектр энергии синусоиды не зависит от сдвига b и определяется симметричным контуром, максимум которого связан с периодом синусоиды следующим образом: $P_0 = a_{\max}$, при этом интенсивность линии в точке максимума равна: $S_{\max}(a_{\max}, b) = A^2/4$.

Хотя связь периода синусоиды и значения $a_{\max}$, а также связь амплитуды и максимума линии зависят от вида анализирующего вейвлета, для вейвлета Морле эти связи точно такие же, как и для обычного Фурье преобразования. То есть вейвлет Морле предпочтительнее использовать в анализе временных рядов, чем МНАТ-вейвлет. Примеры скалограмм синусоид приведены далее на рис. 11.

Вейвлет-преобразование шума. В спектральном анализе временных рядов выделение сигнала из шума производится с заданной вероятностью на основе некоторых статистических критериев. В основе процедуры разделения сигнала и шума лежит принцип – «все, что не шум, то – сигнал». Изучение свойств Фурье-образа или вейвлет-образа белого шума является важным этапом теории анализа временных рядов.

Пусть временной ряд: $x_k = x(t_k)$, $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ представляет собой выборку некоррелированных значений случайной величины, распределенной по нормальному закону, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 (дискретный белый шум):

$$\langle x_p x_q \rangle = \begin{cases} \sigma_0^2, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Получим закон распределения отсчетов скалограммы по масштабам для вейвлета Морле. С этой целью введем обозначение: $\tau_k = (t_k - b)/a$ и представим скалограмму как:

$$S(a, b) = P^2(a, b) + Q^2(a, b)$$

где:

$$P(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\tau_k/\alpha^2} \cos 2\pi\tau_k$$

$$Q(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\tau_k/\alpha^2} \sin 2\pi\tau_k$$

Можно показать, что при фиксированном значении параметра b функции P и Q представляют нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной: $\sigma^2 = \sigma_0^2 Z(a, b)/2$, где:

$$Z(a, b) = \frac{1}{n^2(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\tau_k/\alpha^2}$$

Введем в рассмотрение *нормированную скалограмму*: $s(a, b) = S(a, b) / \sigma_0^2 Z(a, b)$. Величина $2s(a, b)$ имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы, откуда следует, что *нормированная скалограмма $s(a, b)$ представляет собой случайную величину по переменной a , закон распределения которой имеет вид: $p(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$* . Знание закона распределения нормированной скалограммы позволяет получить критерий выделения сигнала из шума. Действительно, вероятность того, что отсчеты нормированной скалограммы преобладают заданную величину T , определяется формулой:

$$Pr\{s(a, b) > T\} = \int_T^\infty p(x) dx = e^{-T}$$

Задавая теперь уровень значимости $q \ll 1$, определяющий вероятность редкого события – превышения отсчета нормированной скалограммы заданной величины, для порога обнаружения сигнала имеем: $T_q = -\ln(q)$. Другими словами, с вероятностью $p = (1 - q)$ можно утверждать, что те значения скалограммы $S(a, b)$, которые удовлетворяют неравенству

$$S(a, b) > \sigma_0^2 Z(a, b) T_q \quad (36)$$

генерируется не шумом, а сигналом. Отметим, что функция $Z(a, b)$ практически не зависит от значений сдвига b . Характерный вид функции, стоящей в правой части формулы (36), показан далее на рис.8 при $N=0$ и $\Delta t=1$.

1.4 Алгоритм вейвлет-анализа временных рядов

Исходные данные:

1. Равномерный временной ряд: $x_k = x(t_k)$, $t_k = \Delta t \cdot k$, $k=0, 1, \dots, N-1$, где Δt – шаг выборки и N – число точек ряда;
2. Критический порог для разделения шумового и детерминированного компонентов временного ряда T_q , отвечающий уровню значимости q (см. соотношение (72)).

Описание алгоритма проиллюстрируем его исполнением для модельного временного ряда:

$$\begin{aligned} x_k &= A_1 \cos(2\pi \nu_1 t_k - \phi_1) + \sigma_n n_k \\ t_k &= \Delta t \cdot k, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (37)$$

где: A_1, ν_1, ϕ_1 – амплитуда, частота и фаза гармонического компонента; n_k ; $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, – значения случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону (шумовая составляющая ряда); σ_n – среднеквадратическое отклонение шумового компонента n_k , задаваемое с помощью соотношения: $\sigma_n = \sqrt{A_1^2 / 2\gamma}$, где γ – отношение «сигнал / шум».

Заданные параметры ряда: $\Delta t=1$ с; $N=100$; $q=0,0$; $A_1=1$; $\nu_1=0,1$ Гц; $\phi_1=0$; $\gamma=0,5$.

Алгоритм вейвлет-анализа состоит из следующих шагов:

1. Графическое представление исходного ряда во временной области. Обычно визуальное изучение графика исходного ряда позволяет обнаружить либо присутствие в данных постоянного слагаемого, либо низкочастотный компонент (тренд). Хотя вейвлеты обладают нулевыми моментами и, следовательно, игнорируют постоянное слагаемое, тем не менее по отношению к тренду они таким свойством обладают не всегда. Для изучения высокочастотных компонентов ряда обе эти составляющие полезно исключить из данных.

2. Исключение тренда и центрирование ряда. Для исключения тренда необходимо задать его модель. Если модель не известна, в качестве формальной модели используют аппроксимацию тренда с помощью линейной комбинации полиномов, в состав которых входит и свободный член. Параметры взятой модели тренда определяются с помощью метода наименьших квадратов, а затем значения тренда вычитаются из исходных данных. В простейшем случае такая операция сводится к исключению постоянного слагаемого (центрированию ряда), причем среднее значение ряда определяется по формуле:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

а центрированный ряд получается из исходного так: $x_k^0 = x_k - m$, $k=0, 1, \dots, N$.

3. Графическое представление центрированного ряда. Для модельного ряда (37) это представление показано далее на рис. 6.

4. Оценка дисперсии ряда производится по формуле:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\circ)^2$$

7. Вычисление вейвлет-преобразования. Дискретные значения амплитудной вейвлет-функции вычисляются по следующим формулам:

$$W_A(a_i, b_j) = \frac{1}{n(a_i, b_j)} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^\circ \psi^* \left(\frac{t_k - b_j}{a_i} \right), \quad n(a_i, b_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(-\frac{1}{B} \left(\frac{t_k - b_j}{a_i} \right)^2 \right) \quad (38)$$

В этих формулах $\psi(t)$ – принятый анализирующий вейвлет. Дальнейшее исполнение алгоритма основано на использовании вейвлета Морле с параметром α^2 : $\psi(t) = e^{-t^2/\alpha^2} e^{i2\pi t}$, причем в формуле (38) следует положить $B = \alpha^2$.

8. Дискретизация аргументов

Каждый вейвлет имеет свою форму и характерный размер, который при фиксированном значении масштабного коэффициента определяется величиной $d_a = 2\Delta_t a$, где Δ_t – радиус вейвлета, определяемый формулой (9).

Функция $W_A(a, b)$ определяет корреляцию между анализирующим вейвлетом, помещенным в точку b , и какой-либо деталью временного ряда размеров d_a с центром в точке b . Модуль этой функции принимает наибольшее значение в том случае, когда размер вейвлета совпадает с размером «текущей» детали временного ряда. В случае полигармонической функции естественной мерой масштаба ее деталей является период гармонических компонентов, мера же протяженности вейвлета d_a определяется значением масштабного коэффициента a . Для полигармонической функции, заданной на сетке с шагом $\Delta t = \text{const}$, диапазон периодов гармоник определяется величинами $P_{\min} = 2\Delta t$ и $P_{\max} = (N-1)\Delta t$. В соответствии с этим выберем наибольшее и наименьшее значения масштабного коэффициента из условия соответствия размеров вейвлета и предельных периодов гармонических компонентов:

$2\Delta_t a_{\min} = P_{\min}$, $2\Delta_t a_{\max} = P_{\max}$, откуда имеем:

$$a_{\min} = \frac{\Delta t}{\Delta_t}, \quad a_{\max} = \frac{(N-1)\Delta t}{2\Delta_t}$$

Для вейвлета Морле эти формулы переписываются следующим образом:

$$a_{\min} = \frac{2\Delta t}{\alpha}, \quad a_{\max} = \frac{(N-1)\Delta t}{\alpha}$$

Отметим, что эти значения берутся в тех случаях, когда необходимо выполнить анализ временного ряда в *полном диапазоне* масштабов. Часто, однако, бывает целесообразно исследовать ряд в более узком диапазоне масштабов. В этом случае значения $a_{\min}$ и $a_{\max}$ выбирают из других соображений.

Введем теперь шаг дискретизации масштабов

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{N_a - 1}$$

Назначим далее дискретные значения масштабных коэффициентов:

$$a_i = a_{\min} + \Delta a i, \quad i = 0, 1, \dots, N_a - 1 \quad (39)$$

Поскольку ширина спектральной линии возрастает с ростом масштаба, иногда значения параметра a представляют в логарифмическом масштабе.

Обсудим далее способы дискретизации параметра b . В простейшем случае границы диапазона сдвигов назначаются следующим образом:

$$b_{\min} \geq 0; \quad b_{\max} \leq (N-1)\Delta t$$

после чего дискретные значения сдвигов можно вычислить по формуле

$$b_j = b_{\min} + \Delta b j, \quad j = 0, 1, \dots, N_b - 1 \quad (40)$$

где N_b – принятое число узлов сетки, следующих друг за другом с постоянным шагом

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{N_b - 1}$$

При выбранном способе дискретизации параметра b вблизи границ $b_{\min}$ и $b_{\max}$ величины $W_A(a_i, b_j)$ будут вычисляться с погрешностями, так как около границ невозможно использовать всю длину анализирующего вейвлета. Для исключения *граничных эффектов* следует вычислять вейвлет преобразование только для значений сдвига, отстоящих от границ на величину, равную текущему радиусу вейвлета $a\Delta_t$. Тогда, вместо формулы (40) имеем:

$$b_j = b_{\min} + \Delta b j, \quad j = J_a^* + 1, \dots, N_b - J_a^* - 1 \quad (41)$$

где J_a^* – выраженный в единицах Δb радиус вейвлета, соответствующий текущему значению масштаба a :

$$J_a^* = \left[\frac{a_i \alpha}{2 \Delta b} \right] \quad (42)$$

В формуле (42) квадратные скобки обозначают операцию округления до ближайшего целого.

Множество узлов дискретной сетки, определенное формулами (39) и (41), называется *треугольником достоверности*. Заметим, что очень часто краевые эффекты игнорируются и результаты вейвлет-анализа представляют просто в прямоугольной области узлов (39) и (40).

9. Вычисление скалограммы для всех узлов сетки производится по формуле:

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2$$

10. Визуализация скалограммы. Значения скалограммы $S(a_i, b_j)$ лежат на поверхности, для изображения которой используют два основных способа:

1) представление поверхности в трехмерном пространстве координат (a, b, S) . Графический пакет МАТНСАД позволяет строить такие графики и воспроизвести их при любой степени разворота и наклона системы координат;

2) плоское изображение поверхности $S(a, b)$ в координатах (a, b) в виде топографической карты. Масштаб третьего измерения указывается либо оцифровкой изолиний, либо раскраской областей между изолиниями. При этом градации цвета или последовательность различных цветов оцифровываются с помощью специальной цветовой палитры, являющейся приложением к графику вейвлета. Представление скалограммы модельного ряда (37) в виде контурной карты показано на рис.9,а, в виде поверхности $\square$ на рис.10,а.

11. Вычисление скелетона. Иногда широкие контуры линий близких по частоте гармоник мешают проследить за эволюцией их частот во времени. Чтобы отсеять влияние контуров, можно выделить те точки скалограммы, в которых она имеет максимумы по переменным a и b :

$$S_c(a_i, b_j) = \begin{cases} S_{ij}, & \text{если } S_{i-1,j} < S_{ij} > S_{i+1,j} \\ & \text{или } S_{i,j-1} < S_{ij} > S_{i,j+1} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (43)$$

В этой формуле использовано обозначение $S_{ij} \equiv S(a_i, b_j)$. Функцию (43) мы будем называть *скелетомом*. В случае синусоидального сигнала точки скелетона располагаются вдоль линий, идущих параллельно оси времени. Если в данных имеются гармонические или квазигармонические компоненты, то топографическая карта скелетона будет состоять из линий, ориентированных вдоль оси b . В случае шумового компонента линии скелетона вытягиваются в перпендикулярном направлении, т. е. параллельно оси a . Если в данных присутствуют и гармонические компоненты, и шум, то карта скелетона позволяет увидеть их раздельно.

Представление скелетона модельного ряда (37) в виде контурной карты показано на рис.9,б, а в виде поверхности – на рис.10,б.

12. Выделение сигнала из шума. Критерий выделения сигнала из шума (36) позволяет построить массив значений скалограммы, которые с заданной вероятностью $1 - q$ принадлежат сигнальному, а не шумовому компоненту:

$$S_q(a_i, b_j) = \begin{cases} S(a_i, b_j), & S(a_i, b_j) \geq \sigma_0^2 Z(a_i, b_j) T_q, \\ 0, & S(a_i, b_j) < \sigma_0^2 Z(a_i, b_j) T_q, \end{cases}$$

где

$$Z(a_i, b_j) = \frac{1}{n^2(a_i, b_j)} \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(-\frac{2}{\alpha^2} \frac{t_k - b_j}{a_i} \right)$$

Иногда бывает целесообразно выделять сигнал не из самой скалограммы, а из ее скелетона. Тогда в правую часть формулы (44) вместо величины $S(a_i, b_j)$ надо подставить $S_c(a_i, b_j)$

Выделение сигнала из шума, описанное в этом пункте, можно применять лишь в тех случаях, когда сигнал засорен именно белым (на практике широкополосным) шумом. Такой подход более соответствует Фурье-анализу, чем вейвлетам, поскольку смысл вейвлет-анализа заключается скорее в изучении нерегулярностей, чем в их исключении.

Представление «сигнальных» линий скелетона модельного ряда (37) в виде поверхности показано на рис.9,с, а в виде контурной карты □ на рис.10,с. Интересно, что проведенное нами восстановление сигнала из шума оказалось неполным: линия синусоиды с заданным периодом $P = 10$ с получилась слегка изогнутой. По-видимому, эта деформация произошла за счет взаимодействия нашей синусоиды с шумом.

13. Вычисление скейлограммы производится по формуле:

$$G_i = \frac{1}{N_b - 2J_a^*} \sum_{j=J_a^*}^{N_b - J_a^* - 1} S(a_i, b_j), \quad i = 0, \dots, N_a - 1$$

где J_a^* задается формулой (42), если вычисления ведутся в треугольнике достоверности. В противном случае следует положить $J_a^* = 0$. График скейлограммы модельного ряда (37) показан на рис. 8. Здесь же штриховой линией прочерчен порог обнаружения сигнала $\sigma_0^2 Z(a, b) T_q$ как функция параметра a при значении сдвига b , соответствующего середине ряда.

14. Конец алгоритма.

1. Домашнее задание

Для выполнения домашнего задания, необходимо в среде Delphi-7 составить и отладить программы, реализующие вывод на экран следующих объектов:

1. Составить программу анализа временных рядов с помощью вейвлет-преобразования, пользуясь алгоритмом, приведенным на с. 23-31.
2. Модифицировать разработанную программу так, чтобы при вычислении вейвлет преобразования перейти от масштаба a к частоте $\nu = 2\pi/a$.
3. Использовать разработанные в п.1-2 программы, проведите анализ модельных временных рядов, выбрав свой вариант задания из приведенных ниже.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Варианты заданий

Вариант № 1. Скачок периода

Выполнить моделирование для четного N двух следующих рядов:

$$x_k = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) + A_1 \cos(2\pi\nu_2 t_k - \phi_2)$$

$$y_k = \begin{cases} A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1), & k \leq N/2 \\ A_1 \cos(2\pi\nu_2 t_k - \phi_2), & k > N/2 \end{cases}$$

$$t_k = \Delta t \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Получите периодограммы и скалограммы двух рядов. Дайте объяснение полученных результатов.

Вариант № 2. Скачок амплитуды

Для четного значения N смоделируйте два ряда

$$\begin{aligned} x_k &= A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) \\ y_k &= \begin{cases} A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1), & k \leq N/2 \\ A_2 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_2), & k > N/2 \end{cases} \\ t_k &= \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (108)$$

Объясните различие периодограмм и скалограмм двух рядов при $A_1 \neq A_2$.

Вариант № 3. Дрейф частоты

Получите модельный ряд

$$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi t_k}{P_k}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

где A – амплитуда, P_k – переменный период:

$$P_k = P \left[1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi t_k}{P_0}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Здесь P – начальный период гармонического компонента; P_0 – период изменения величины P .

Постройте скалограмму при следующих значениях параметров:

$$N = 100, \quad \Delta t = 1 \text{ с}, \quad A = 1, \quad P = 15 \text{ с}, \quad P_0 = 200 \text{ с}$$

Почему ширина линии гармонического компонента с переменным периодом меняется с изменением значения параметра b ?

Вариант № 4. Синусоиды в белом шуме

Получите модельный ряд

$$\begin{aligned} x_k &= A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) + A_2 \cos(2\pi\nu_2 t_k - \phi_2) + \sigma_n n_k \\ t_k &= \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (114)$$

где

Δt – постоянный шаг выборки;

$A_i, \nu_i, \phi_i, i = 1, 2$, – амплитуды, частоты и фазы двух гармонических компонентов;

$n_k; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, – значения случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону (шумовой компонент ряда);

σ_n – среднеквадратическое отклонение шумового компонента n_k , которое можно вычислить через отношение «сигнал к шуму» γ с помощью соотношения

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{2\gamma}}$$

Задаваемые параметры ряда:

1) характеристики гармоник $A_i, \nu_i, \phi_i, i = 1, 2$;

2) отношение «сигнал к шуму» γ .

Выполните следующие упражнения и ответьте на заданные вопросы.

1. Получите скалограммы ряда (113) при $N = 100$ и $N = 1000$. Почему разрешающая способность вейвлет-преобразования не зависит от длины ряда?

2. Как обеспечить разрешение в скалограмме двух близких по частоте гармоник (скажем, $\nu_1 = 10$ Гц и $\nu_2 = 12$ Гц при $\Delta t = 1$ с)?

3. Используя программу вейвлет-анализа, постройте скалограммы ряда, состоящего из двух близких по частоте гармоник, так, чтобы увидеть эффекты слияния линий, а также картины их частичного и полного разрешения.

Вариант № 5. Линейный тренд

Получите модельный ряд

$$x_k = a + b t_k \quad (116)$$

$$t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

где Δt – постоянный шаг выборки; a, b – параметры тренда.

Выполните следующие упражнения и ответьте на заданные вопросы.

1. Постройте скалограммы и скелетоны линейного тренда при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.
2. Постройте скалограмму ряда (116) при $b = 0$. В каких случаях эффект постоянного слагаемого обнаруживается в скалограмме вопреки соотношению (11)?

Вариант № 6. Вейвлет-анализ шума

Получите модельный ряд

$$x_k = \xi_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

где $\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, – выборка случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону;

Получите скалограммы нескольких реализаций шума, пользуясь стандартными программами генерации случайной величины, распределенной по нормальному закону. Почему в картах скелетонов всегда присутствуют линии, ориентированные и вдоль оси времени, и вдоль оси масштабов?

Вариант № 7. Псевдоколебания

Постройте следующие модельные ряды:

$$x_k = 1.372 x_{k-1} - 0.693 x_{k-2} + 16.55 \xi_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$x_k = 1.246 x_{k-1} - 0.344 x_{k-2} + 0.052 \xi_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

где $x_0 = 0, x_1 = 0$ – начальные значения;

$\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, – выборка из случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону.

Получите несколько реализаций рядов (119) и (120), пользуясь стандартными программами генерации нормально распределенной случайной величины, и постройте их скелетоны.

Ряды (119) и (120) – это авторегрессионные модели ряда чисел Вольфа и кривой блеска квазара 3C273 (освобожденные от линейных трендов). Сравните результаты, полученные Вами для моделей (119) и (120), с характеристиками вейвлет анализа исходных рядов, которые приведены в двух предыдущих параграфах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Пример выполнения задания

Вейвлет-анализ модельных функций

В Фурье-анализе временных рядов, состоящих из гармонических компонентов и шума, очень важно знать, какой вид имеют эти компоненты в частотной области. В этом параграфе, используя вышеприведенный алгоритм, мы приведем некоторые «вейвлет-портреты» модельных временных рядов и их стандартных компонентов.

Синусоида

Рис. 11 дает возможность сравнить две скалограммы синусоиды с периодом 20 с, заданной на равномерной сетке с шагом $\Delta t = 1$ с при $N = 100$. Мы видим, что использование МНАТ-вейвлета дает специфическую скалограмму, состоящую из выпуклых поверхностей, следующих друг за другом с интервалом 10 с. Объясняется это тем, что с точки зрения МНАТ-вейвлета (который сам имеет форму шляпы, пусть и мексиканской) характерной де-

талью на графике полигармонической функции является выпуклость или вогнутость синусоиды, т. е. полупериод колебания. В противоположность этому вейвлет Морле, имеющий форму гармонического колебания (хотя и затухающего), распознает во временном ряду именно колебания полного периода. Этим и объясняется характерная форма синусоиды в координатах (a, b, S) , похожая на равномерную горную гряду (см. рис. 11,е). Такое представление скалограммы синусоиды соответствует ее Фурье-образу, поэтому вейвлет Морле более предпочтителен для анализа гармонических функций, чем МНАТ-вейвлет.

Разрешение двух синусоид

Следующие два примера посвящены вейвлет-анализу временного ряда, представляющего собой сумму двух синусоид с периодами $P_1 = 20$ с и $P_2 = 35$ с при $\Delta t = 1$ с и $N = 100$. На рис.12 показаны график исходной функции, ее Фурье-периодограмма, скалограммы и скейлограммы, полученные с помощью МНАТ-вейвлета и вейвлета Морле. Легко заметить (см. рис. 12,с,d), что с помощью МНАТ-преобразования не удастся разрешить два компонента исходного ряда, несмотря на то, что их периоды существенно различны. Этот факт объясняется сильной локализацией МНАТ-вейвлета во временной области, в результате чего разрешающая способность в области масштабов становится очень низкой. С этой точки зрения результаты вейвлет-анализа нашей синусоиды с помощью вейвлета Морле оказываются более благоприятными. Теперь мы видим, что обе линии успешно разрешились как в скалограмме, так и в скейлограмме (см. рис. 12,е,f). Объясняется этот факт просто: вейвлет Морле не так сильно локализован во времени (он всегда охватывает α периодов), в результате чего при $\alpha^2 = 2$ его разрешающая способность в области масштабов больше, чем у МНАТ-вейвлета. Тем не менее, могут возникнуть ситуации, когда две близкие по частоте гармоники не будут разрешаться и с помощью вейвлета Морле при стандартном значении $\alpha = \sqrt{2}$. В таких случаях значение параметра α нужно увеличить. При этом мы, естественно, уменьшим временное разрешение вейвлет-преобразования за счет увеличения его разрешающей способности в области масштабов (периодов).

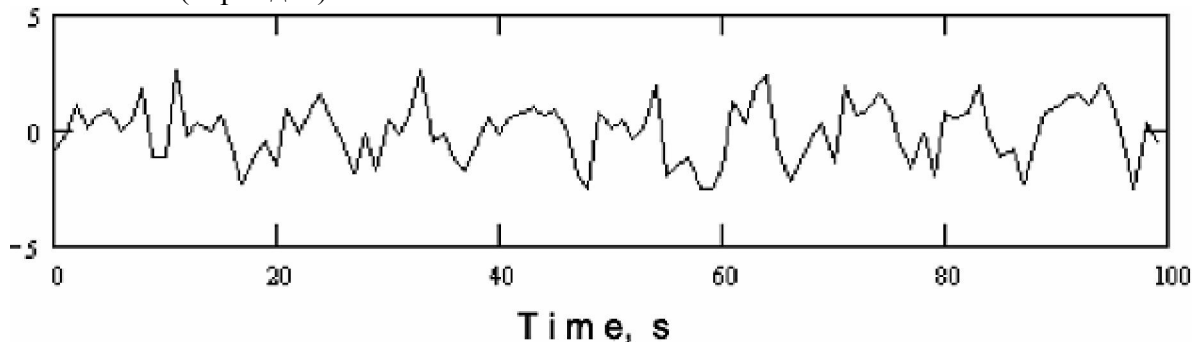


Рис. 6: Модельный ряд (37).

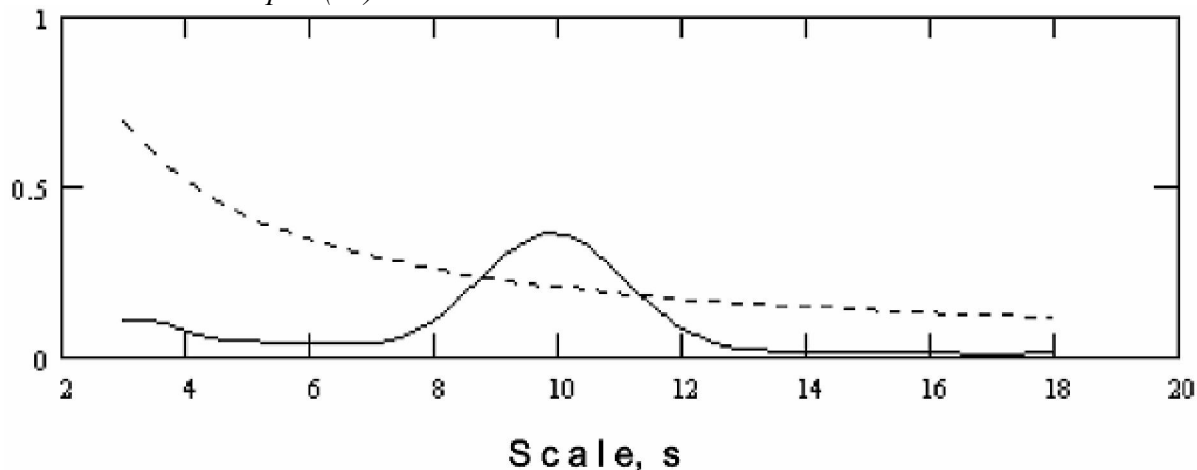


Рис. 8: Скейлограмма модельного ряда (37). Штриховой линией показан 99-процентный порог обнаружения сигнала в шумах.

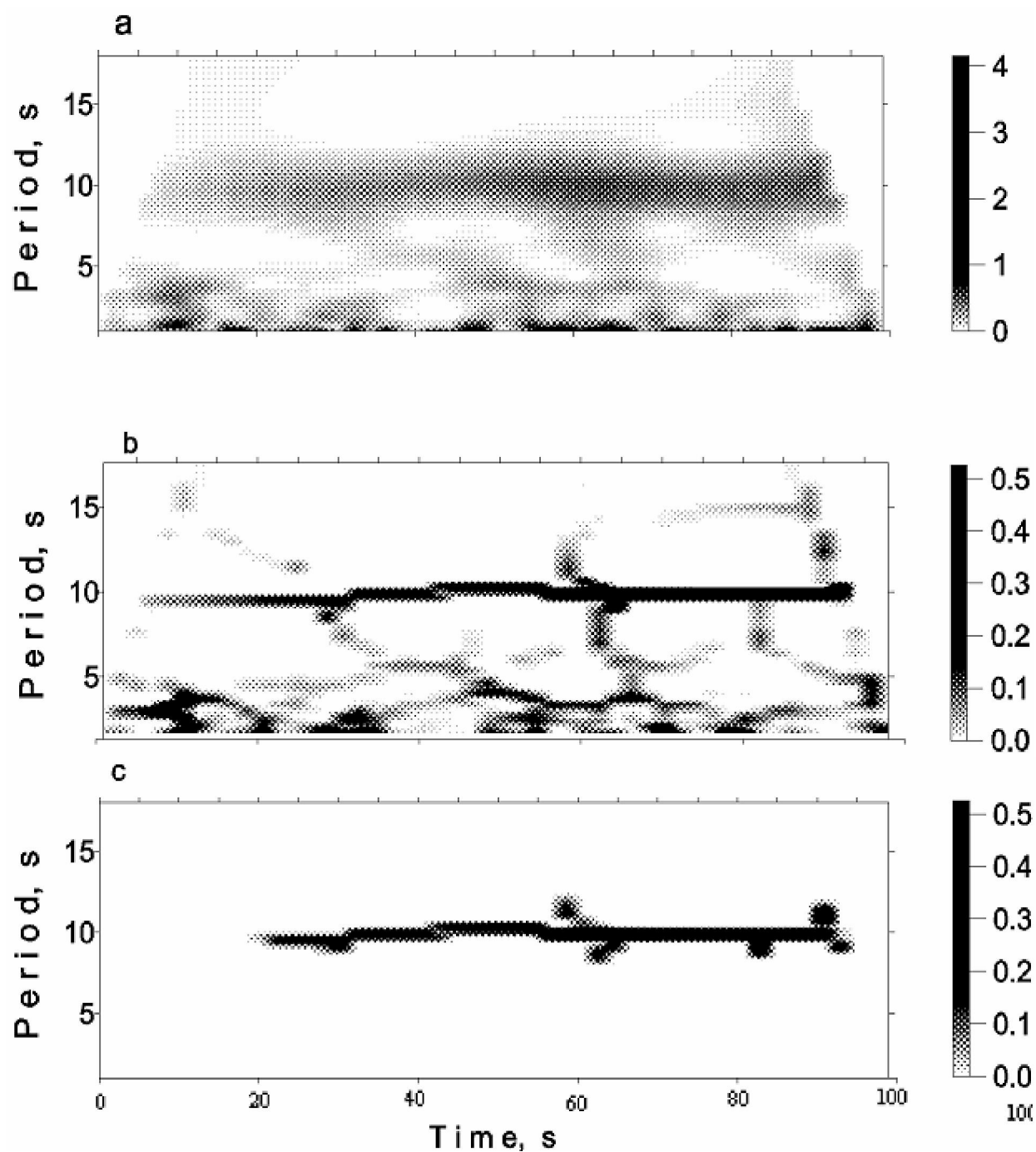


Рис. 9: Результаты вейвлет-анализа модельного ряда (37), представленные в виде топографических карт. а – скалограмма; б – скелетон скалограммы; с – сигнальный компонент скелетона, выделенный из шума с вероятностью 0.99. Вычисления произведены в треугольнике достоверности.

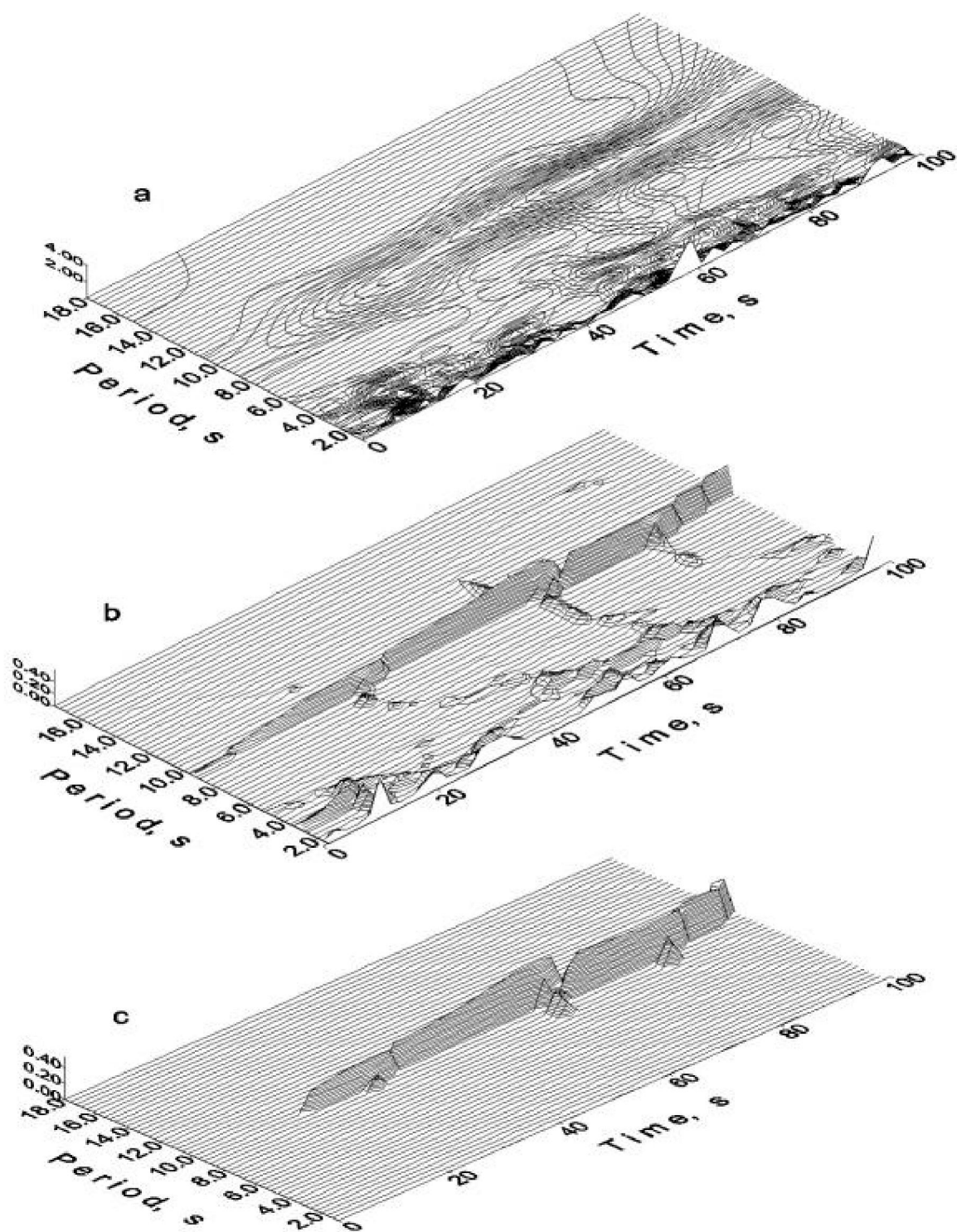
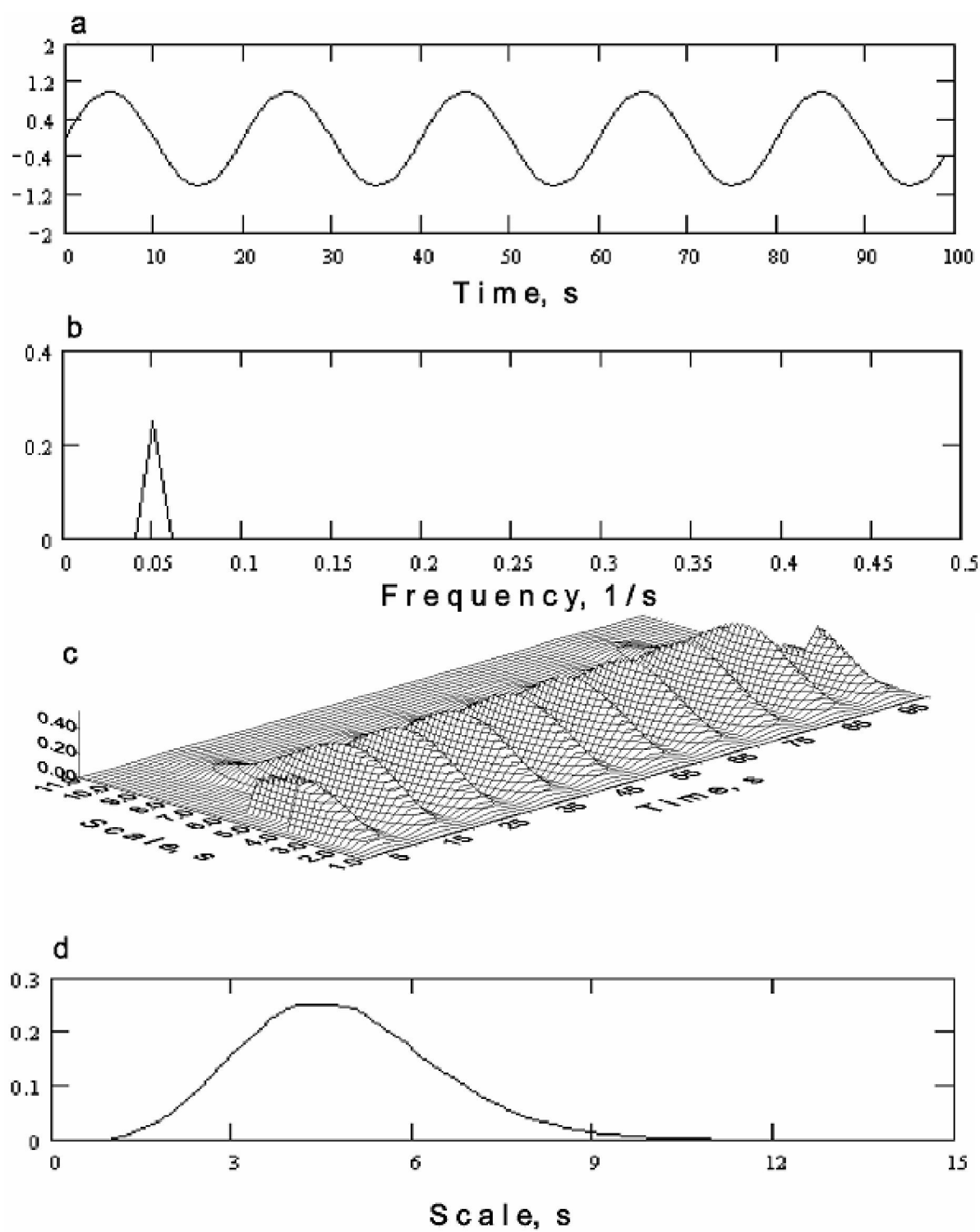


Рис. 10: Результаты вейвлет-анализа модельного ряда (37), представленные в виде поверхностей в трехмерном пространстве. *a* – скалограмма; *b* – скелетон скалограммы; *c* – сигнальный компонент скелетона, выделенный из шума с вероятностью 0.99. Вычисления произведены во всей области определения параметров *a* и *b*.



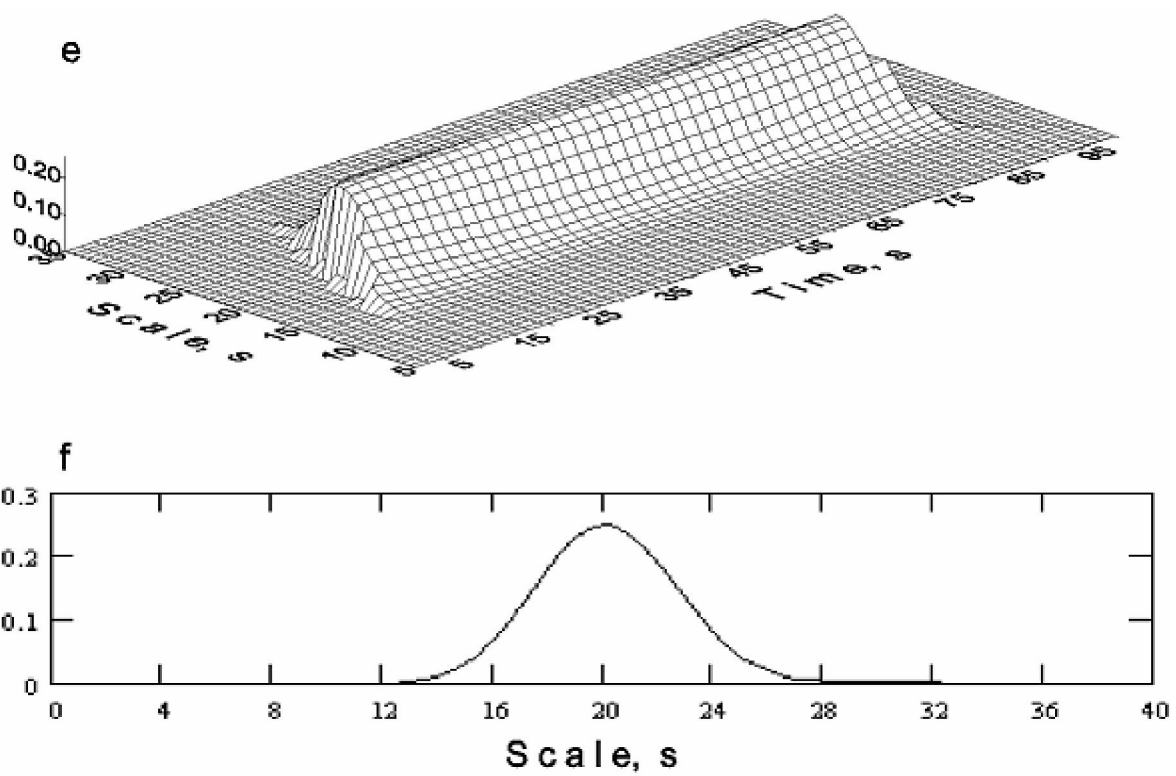
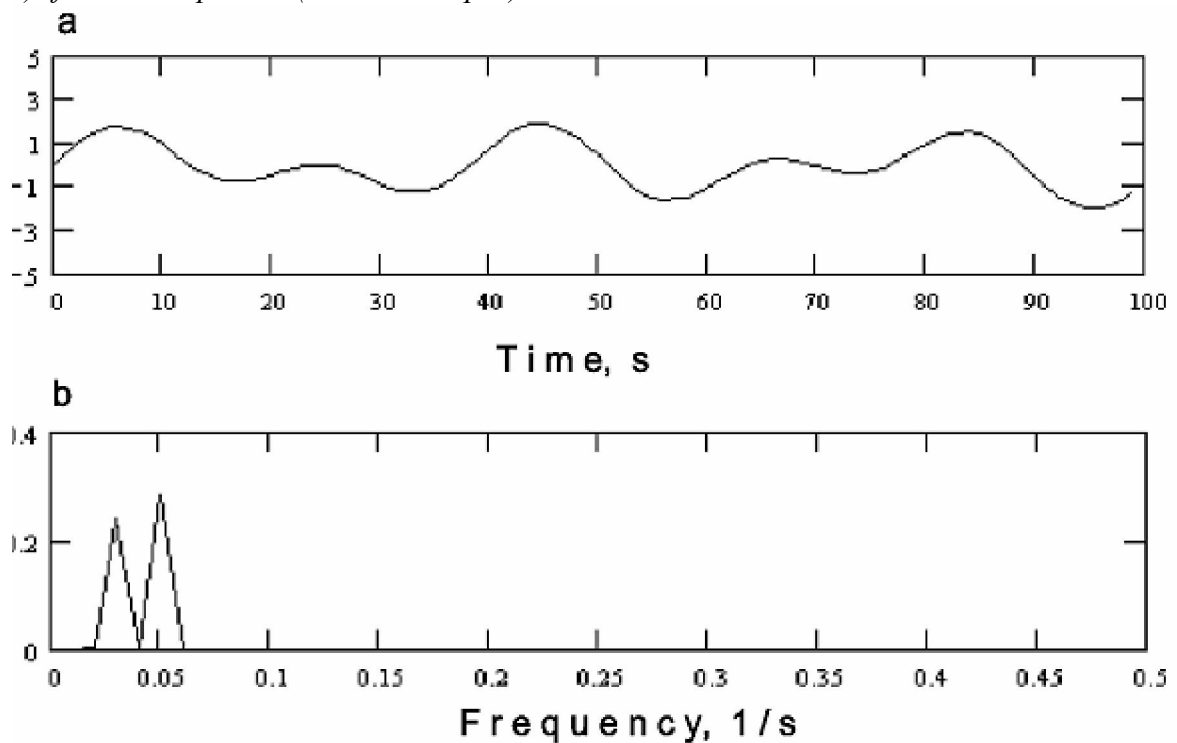


Рис. 11: Вейвлет-анализ синусоиды: *a* – исходный ряд; *b* – Фурье-периодограмма; *c* – скалограмма (МНАТ-вейвлет); *d* – скейлограмма (МНАТ-вейвлет); *e* – скалограмма (вейвлет Морле); *f* – скейлограмма (вейвлет Морле).



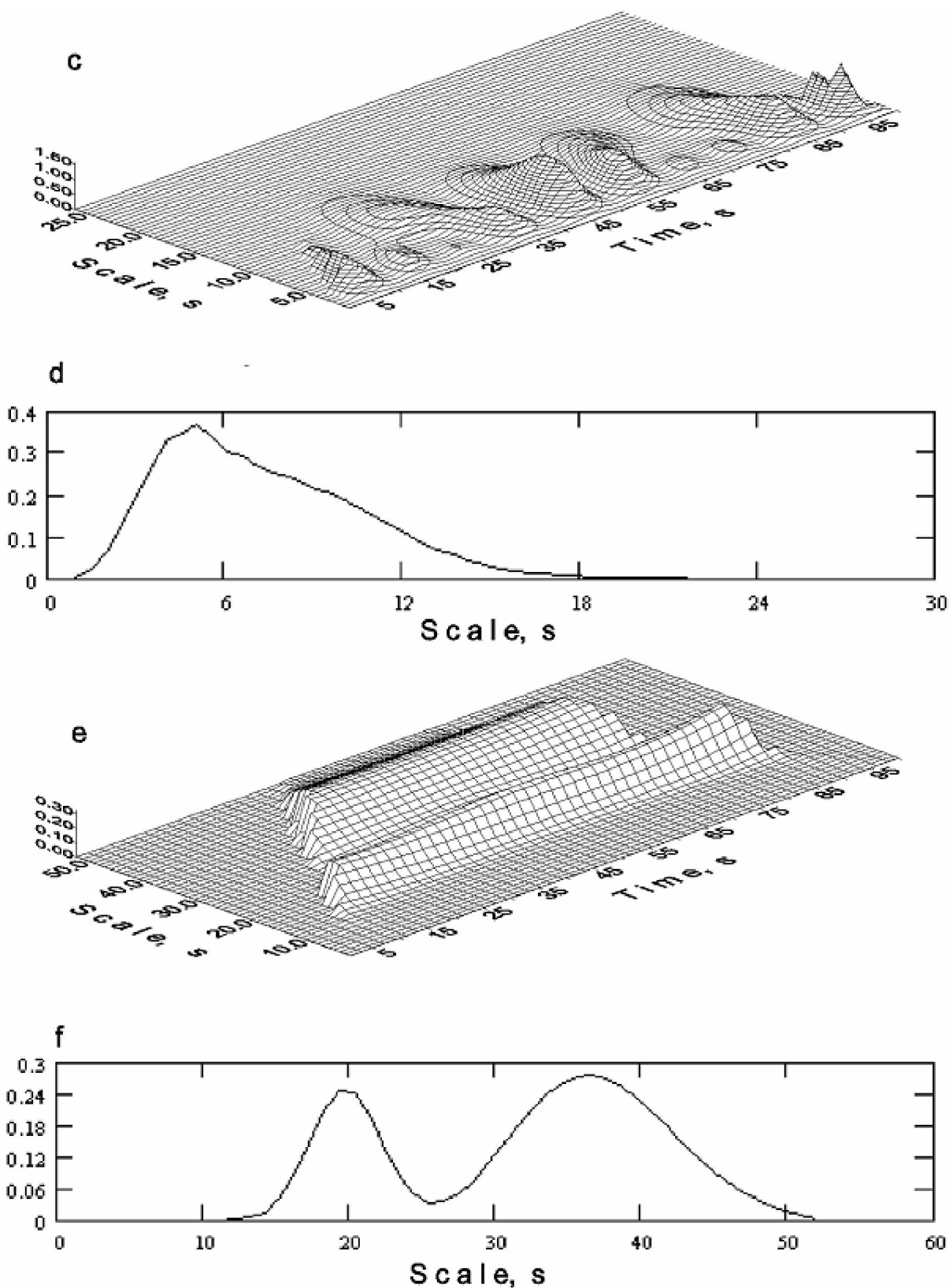


Рис. 12: Разрешение двух синусоид: *a* – исходный ряд; *b* – Фурье-периодограмма; *c* – скалограмма (МНАТ-вейвлет); *d* – скалограмма (вейвлет Морле); *e* – скейлограмма (МНАТ-вейвлет); *f* – скейлограмма (вейвлет Морле).

Синусоида с переменным периодом

Приведенные примеры показывают, что при анализе регулярных сигналов вейвлет-преобразование не дает новой информации по сравнению с Фурье-преобразованием. Ситуация резко меняется, когда мы переходим к сигналам, параметры которых меняются во времени. На рис. 13 приводятся исходный ряд, Фурье-периодограмма и скалограмма для синусоиды с переменным периодом.

соиды, период которой уменьшается вдоль длины ряда. Мы видим, что Фурье-анализ дает в этом случае периодограмму, в которой пики мощности размазаны по сравнительно широкому диапазону частот, в то время как скалограмма четко показывает дрейф периода во времени.

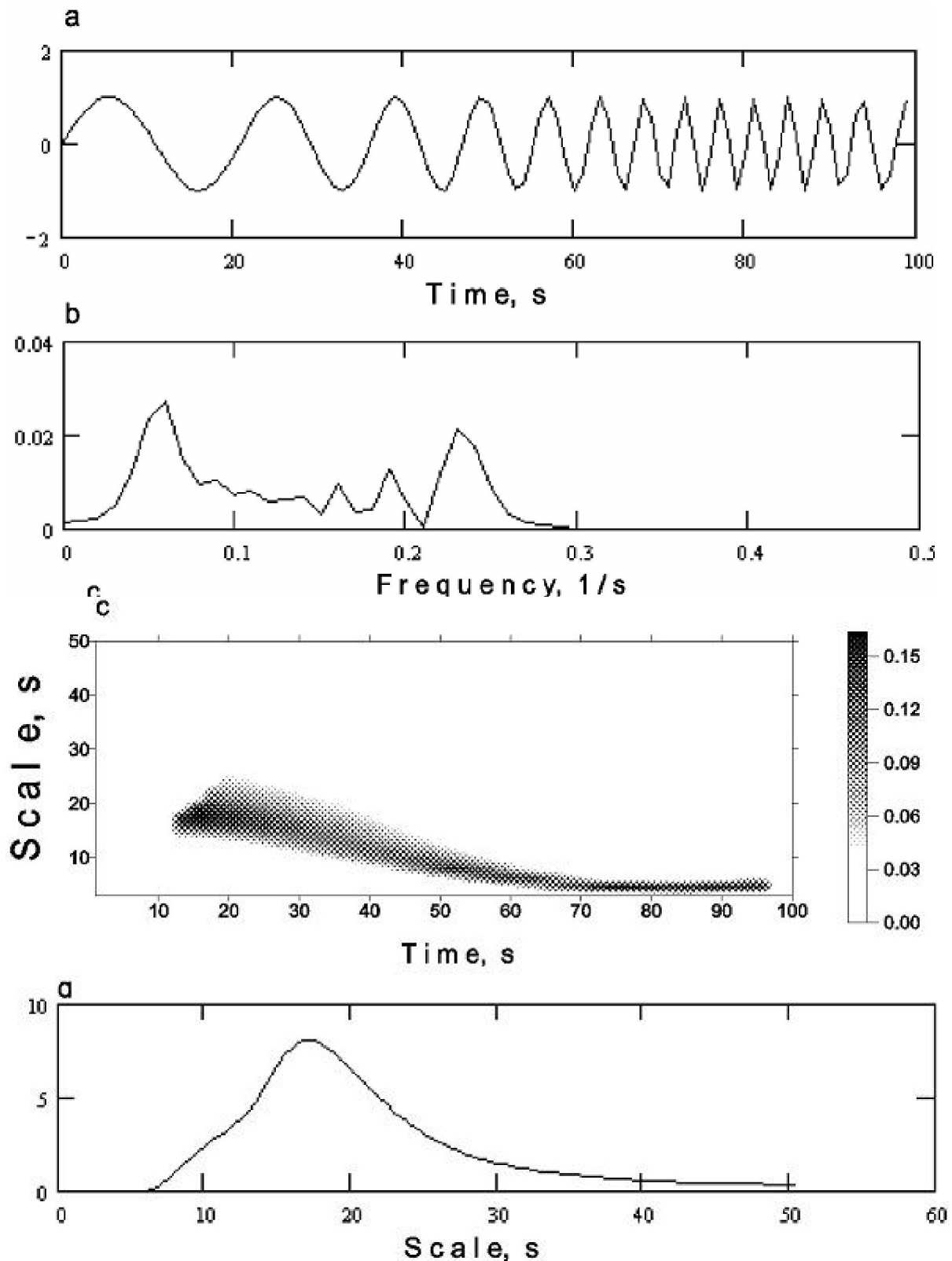


Рис. 13: Вейвлет-анализ синусоиды с переменным периодом: а – исходный ряд; б – Фурье-периодограмма; с – скалограмма (вейвлет Морле); d – скейлограмма (вейвлет Морле).

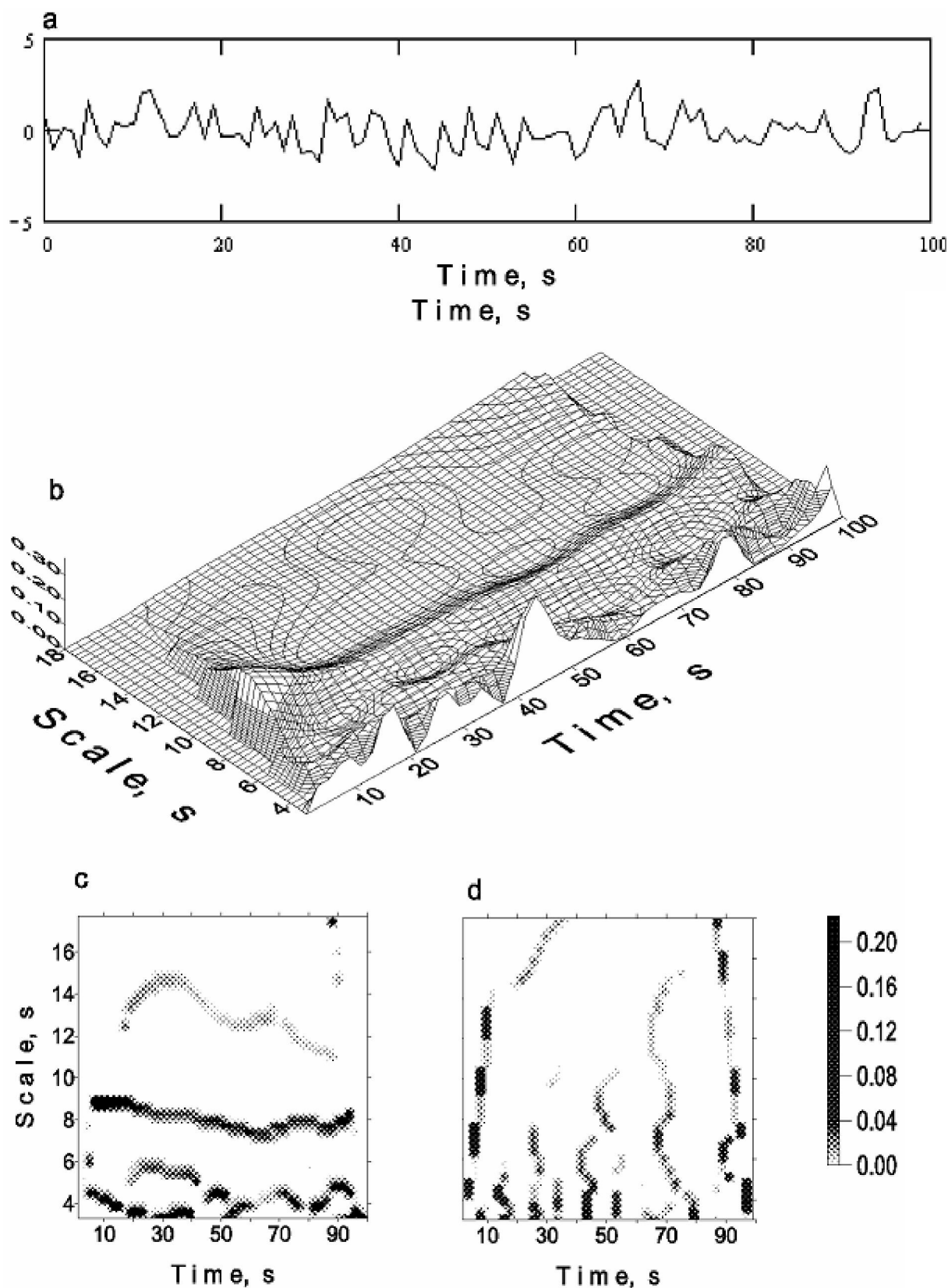


Рис. 14: Вейвлет-анализ шумового сигнала: *a* – дискретный белый шум; *b* – скалограмма (вейвлет Морле); *c* – скелетон скалограммы (локализация максимумов вдоль шкалы масштабов; *d* – скелетон скалограммы (локализация максимумов вдоль оси времени.)

Дискретный белый шум

На рис. 14 показан результат вейвлет-анализа последовательности 100 случайных чисел, полученных с помощью одной из стандартных программ генерирования значений нормально распределенной случайной величины, имеющей нулевое математическое ожидание и

единичную дисперсию. На рис. 14,a представлен временной ряд, а на рис. 14,b – картина скалограммы, имеющей топографию сложного горного массива. Рис. 14,c,d показывают линии скелетонов в направлениях осей времени (сдвига) и периодов (масштабов). Можно видеть, что в состав псевдослучайной последовательности входят как квазигармонические компоненты, эволюционирующие во времени (линии, идущие по направлению оси времени), так и чисто шумовые компоненты, т. е. линии, идущие перпендикулярно оси времени, на которых значения скалограммы остаются приблизительно одинаковыми в широком диапазоне масштабов.

Авторегрессионная модель

Для изучения многих процессов, промежуточных по своей природе между периодическими и чисто случайными, используются так называемые авторегрессионные модели $AR(p)$, задаваемые в дискретном случае с помощью соотношения

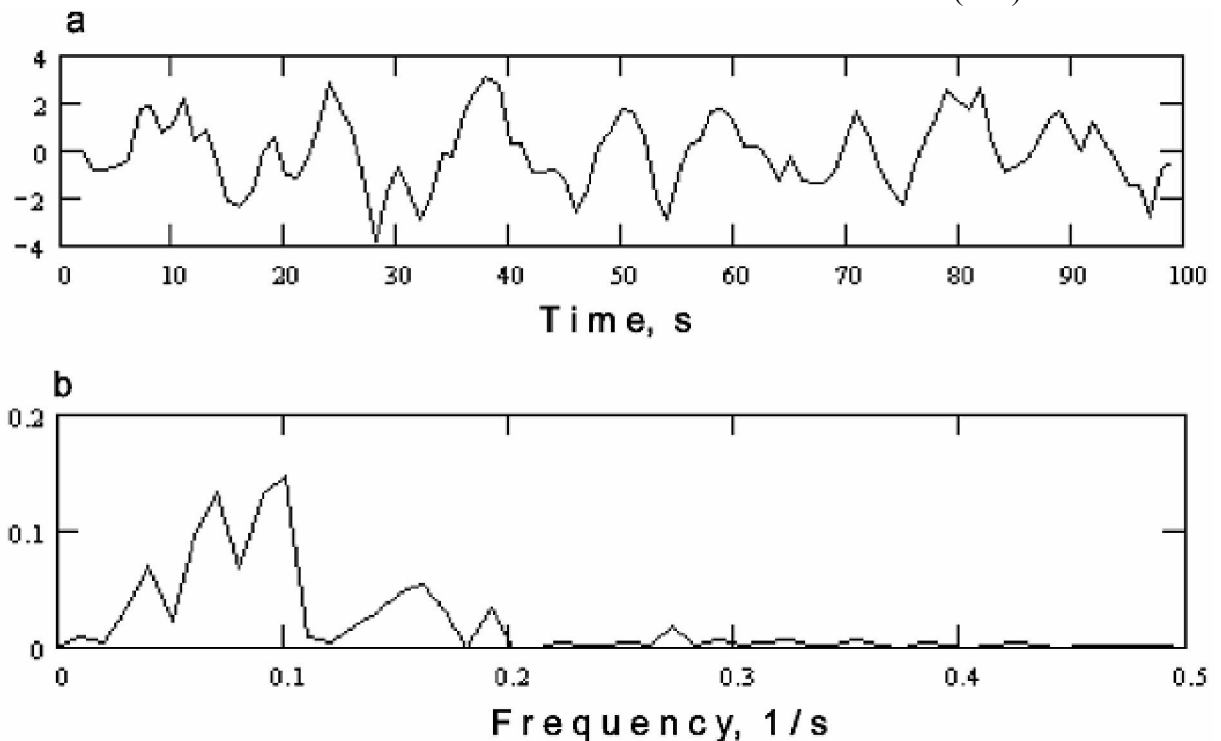
$$x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots + a_p x_{k-p} + \xi_k \quad k = p+1, \dots, \quad (98)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_p$ – параметры модели, p – порядок модели, ξ_k – гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной дисперсией. Например, модель $AR(0)$ – это просто шум, $AR(1)$ – марковский процесс, $AR(2)$ – псевдоколебания и т.д.

Последовательности типа (98) характеризуются спектрами, в которых имеются концентрации мощности в узких интервалах частот. Следует отметить, что сами AR -модели не вскрывают внутреннюю структуру временного ряда. Очевидно, что такую возможность нам дает вейвлет-анализ. На рис. 15 и 16 показаны результаты Фурье-анализа и вейвлет-анализа авторегрессионных модельных рядов $AR(2)$ и $AR(3)$:

$$x_k = x_{k-1} - 0.4x_{k-2} + \xi_k \quad k = p+1, \dots, \quad (99)$$

$$x_k = x_{k-1} - 0.5x_{k-2} + 0.4x_{k-3} + \xi_k \quad k = p+1, \dots \quad (100)$$



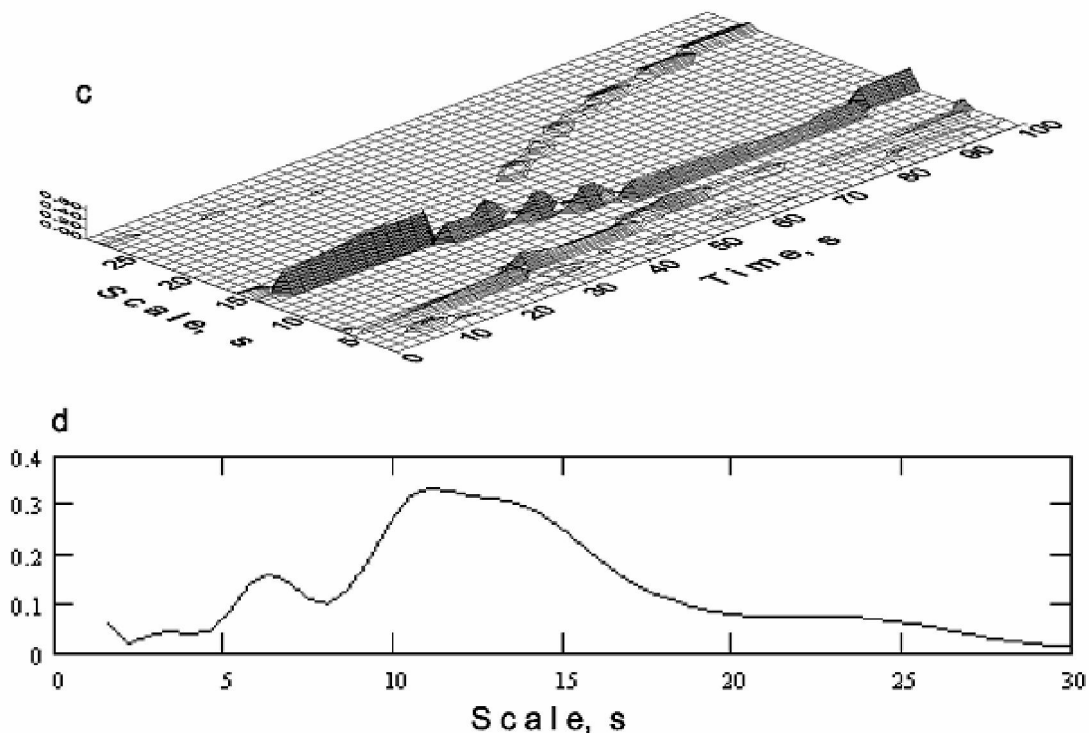


Рис. 15: Анализ авторегрессионного процесса (99): *a* – исходный ряд; *b* – периодограмма; *c* – скелетон; *d* – скейлограмма.

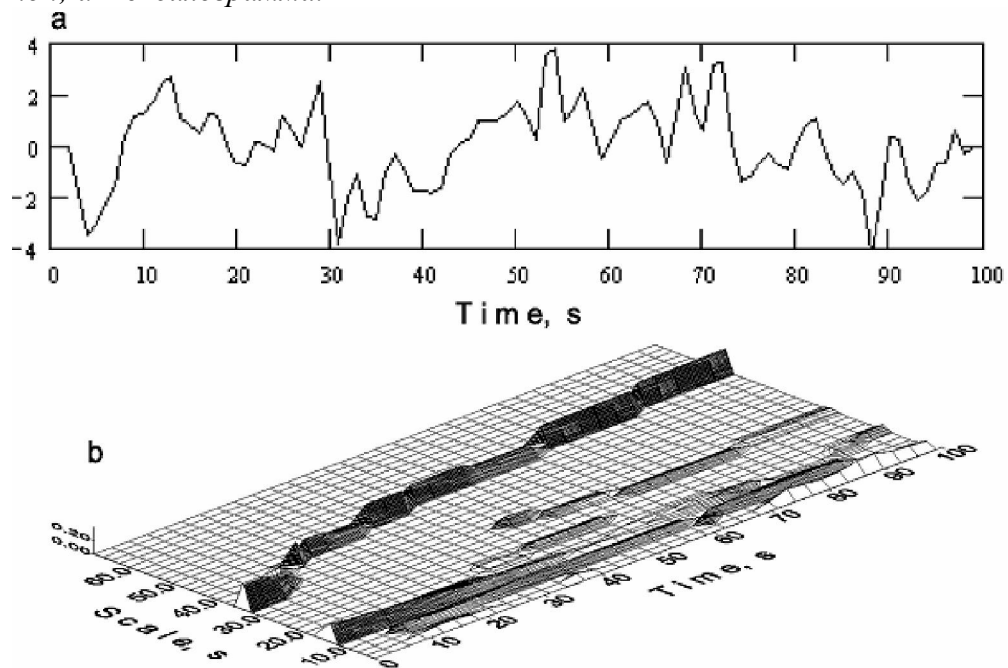


Рис. 16: Вейвлет-анализ авторегрессионного процесса (100): *a* – исходный ряд; *b* – скелетон.

На периодограмме Шустера ряда (99) мы видим концентрацию мощности в пределах от 0 до 0.1 – 0.2 Гц, однако в этом диапазоне линии плохо разрешаются. Это свидетельствует о существовании в структуре ряда квазипериодических компонентов. Скелетоны рядов (99) и (100) подтверждают это предположение, показывая одновременно, как эти псевдогармонические компоненты развиваются во времени. В скелетонах наших рядов имеются длинные и короткие синусоподобные линии с переменными интенсивностями и масштабами (периодами). Интересно отметить, что на картах скелетонов практически нет линий, направленных перпендикулярно оси времени. Основные линии скелетонов ориентированы вдоль оси времени, свидетельствуя о преобладании в *AR*-процессах скорее колебательных, чем стохастических компонентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проекта, руководствуясь единой концепцией, созданы методические материалы по дисциплине «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ». Методические материалы содержат нормативную базу дисциплины, рекомендации по организации и проведению лекций и лабораторных работ, перечень слайдов, типовых плакатов и другие дидактические материалы для работы профессорско-преподавательского состава по данной дисциплине.

Цель дисциплины – профессиональная подготовка студентов в области применения средств и методов многокомпонентного 3d проектирования наносистем и нанообъектов в нанотехнологии. Материал курса является основой для изучения других дисциплин цикла, таких как «Проектирование наносенсоров», «САПР Наносистем» и ряда других, выполнения исследовательской части курсового проекта, курсовых работ по моделированию и проектированию наносистем и подготовки магистерской диссертации.

Задачи дисциплины – формирование знаний, умений и навыков по моделированию наносистем, наноматериалов и наноструктур с новыми функциональными возможностями и по компьютерному проектированию 3D наносистем (наноустройств).

При организации учебного процесса подготовки магистров по направлению подготовки «Нанотехнология» с профилем подготовки «Нанотехнология» следует уделить особое внимание использованию современных информационных технологий при решении задач при моделировании нанотехнологических объектов и процессов. Разработанный учебно-методический комплекс «Многокомпонентное 3D проектирование наносистем» для магистров по направлению подготовки «Нанотехнология» с профилем подготовки «Нанотехнология» ориентирован на получение студентами навыков использования современных методов математического моделирования нанотехнологических объектов «среда-структура».

Курс «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ» может читаться в соответствии с методикой, принятой на кафедре, осуществляющей подготовку бакалавров и магистров по математическому направлению «Нанотехнология», причем в зависимости от учебных планов отдельные разделы программы могут излагаться более расширенно или более сжато; очередность разделов курса может также варьироваться.

Учитывая стоимость лицензионного программного обеспечения для курса «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ» при организации учебного процесса магистров рекомендуется максимально использовать возможности научно-образовательных центров по нанотехнологии.

Курс «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ» представляет собой непрерывно развивающуюся дисциплину, постоянно обогащающуюся все новыми разделами. В этой связи рекомендуется регулярное обновление курса в соответствии с последними достижениями в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроссман и Морле, 1984. – Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape //SIAM J. Math. P.723-736.
2. Гэбор, 1946. – Gabor D. // J. Inst. Elect. Eng. Vol. 93. P. 429.
3. Добечи, 1992. – Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
4. Койфман, 1992. – Wavelets and their applications /Ed. R.Coifman. Boston: Jones and Barlett Publ.
5. Кункель, 1967. – Kunkel W.E. A harmonic analysis of the Light Variations of 3C273. // Astron. J. Vol. 72. N10. P. 1341-1348.
6. Скаргл и др., 1993. – Scargle J.D. The Quasi-Periodic Oscillations and Very Low Frequency Noise of Scorpius X-1 as Transient Chaos: A Dripping Handrail? // Ap. J. Vol. 411. L91-L94.
7. Скаргл, 1997. – Scargle J.D. Wavelet and Other Multi-resolution Methods for Time Series Analysis. Statistical Challenges in Modern Astronomy II /Ed. G.J.Babu and E.D.Feigelson. P. 333-347. N.Y.: Springer-Verlag.
8. Терлер, 1999. – Turler et al. 30 years of multi-wavelength observations of 3C273 // A&AS. Vol. 134. P. 89-101.
9. Тримбл В. 1997. – Trimble V. Late-Night Thoughts of a Classical Astronomer. Statistical Challenges in Modern Astronomy II /Ed. G.J. Babu and E.D. Feigelson. P. 365-385. N.Y.: Springer-Verlag.
10. Фостер, 1996. – Foster G. Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series // Astron. J. Vol. 112. N4. P. 1709-1729.
11. Шустер, 1906. – Schuster A. On the Periodicities of Sun Spots //Trans. R. Soc. London. Ser A. Vol. 206. P. 69-100.
12. Юл, 1928. – Yule J.U. On a Method of Investigation Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. // Phylos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. Vol. 226. P.267-298.
13. [http://www.festu.khv.ru/index2.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=582&Itemid=243]
14. http://www.bashedu.ru/autoreferat/aref2008_153.doc

Учебно-методический комплекс

Библиотека нанотехнологий

НАЗАРОВ А.В.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению
домашнего задания
по курсу
«МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ 3D
ПРОЕКТИРОВАНИЕ НАНОСИСТЕМ»**

Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
Член-корреспондента РАН, профессора,
В.А.Шахнова

Список представителей академического сообщества и работодателей,
принимавших участие в разработке и экспертизе Учебно-методического обеспечения:

Бугаев А.С. (академик РАН, заведующий кафедрой МФТИ)
Волков С.И. (к.т.н., заведующий отделом НИИСИ РАН)
Клюев В.В. (академик РАН, директор МНТПО «Спектр»)
Кальнов В.А. (к.т.н., ученый секретарь ФТИАН РАН)
Марков Л.К. (к.ф.-м.н., ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН)
Мироненко И. Г. (профессор, д.т.н., заведующий кафедрой С.-ПбГЭТУ (ЛЭТИ))
Нарайкин О.С. (член-корреспондент РАН, первый заместитель директора
РНИЦ «Курчатовский институт» по научной работе)
Руфицкий М.В. (профессор, д.т.н., заведующий кафедрой ВлГУ).

Подписано в печать 10.08.2009. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 1,8, Усл. печ. л. 1,7, Уч.-изд.л. 1,8.
Тираж 100 экз. Изд. №1284. Заказ № 2284.

МГТУ им.Н.Э.Баумана.
105005, Москва, 2-ая Бауманская 5