

Тема 5. Основы вейвлет-анализа. Equation Section (Next)

Методы обработки информации, рассмотренные в предыдущих разделах, основаны на преобразовании Фурье. Преобразование Фурье дает мощный математический аппарат, позволяющий эффективно решить ряд практически важных задач. И, самое главное, преобразование Фурье относится к категории физически обоснованных математических моделей, так как оно физически реализуется различными устройствами. В частности, в оптике, как мы видели, преобразование Фурье реализуется положительной линзой.

Однако, суть преобразования Фурье заключается в представлении любой квадратично интегрируемой функции с конечной энергией (нормой) в виде бесконечной суммы гармонических составляющих. Под гармоникой, напомним, понимается бесконечная синусоида. Спектральный анализ дает информацию о частоте, но не дает информацию о локализации частоты в пространстве (или во времени). Поэтому Фурье-анализ хорош для анализа стационарных процессов.

При Фурье-анализе существенно нестационарного в локальной области процесса, т.е. процесса с какой-либо локальной особенностью, затруднено получение информации о локализации изучаемой особенности. Действительно, гармоники - бесконечные функции. В точке локализации особенности их сумма должна дать эту особенность, а в стороне от неё гармоники при сложении должны взаимно уничтожить друг друга. Рассмотрим «рафинированный» случай особенности – дельта функцию. Ей спектр постоянен, следовательно, для того, чтобы представить дельта-функцию в спектральной области, необходимы все компоненты спектра – от нулевой частоты до бесконечности. Потеря каких-либо спектральных компонент сразу ведет к изменению восстановленной функции. В частности, потеря высокочастотных компонент спектра ведет к преобразованию дельта-функции, не имеющей по определению ширины, в функцию с некоторой шириной. В оптике этот процесс хорошо известен под названием дифракционного ограничения разрешения.

Процессов с локальными особенностями в реальности встречается достаточно много – это и геофизическая информация, и процессы обтекания препятствий воздушными и жидкостными потоками, процессы горения, распространения и взаимодействия ультракоротких импульсов, сжатия изображений и многие другие. Причем именно процессы с локальными особенностями представляют в последнее время наибольший интерес с точки зрения развития высоких технологий.

В качестве примера, на Рис.5.1. приведены два процесса – гармоническое колебание и то же колебание, но со сбоем по фазе в точке 400. Это и есть особенность процесса. На Рис.5.2. приведены действительные части Фурье-спектров этих процессов – из их сравнения видно, что второй процесс не является «чистым» гармоническим колебанием, но локализовать особенность по действительной части спектра Фурье невозможно.

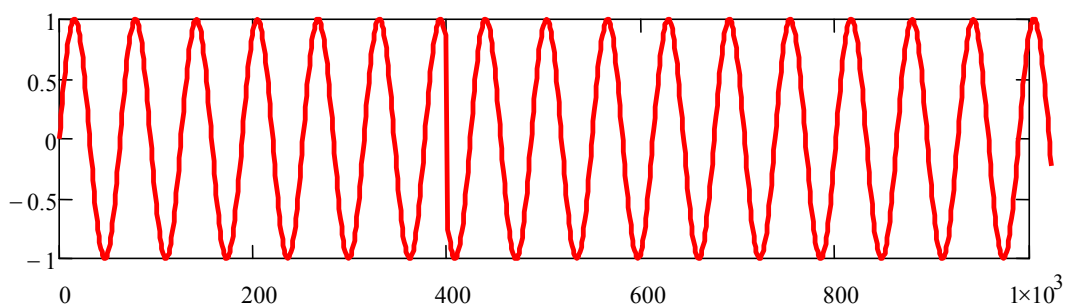


Рис.5.1. Пример процесса с особенностью – «сбоем фазы» в точке 400.

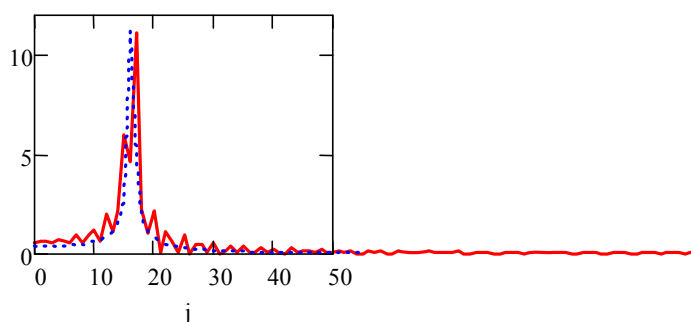


Рис.5.2. Действительные части процессов с локальной особенностью (сплошная линия) и гармонического колебания (пунктир).

Проблема анализа процессов с локальными особенностями частично снимается применением так называемого «оконного преобразования Фурье», но только частично. Наиболее мощный инструмент дает вейвлет-анализ, обеспечивающий получение одновременно как частотной, так и пространственной информации об исследуемом объекте.

На Рис.5.3. приведен пример разложения по WAVE-вейвлету (что означает этот термин мы рассмотрим ниже) только для одного масштаба – особенность процесса сразу локализована.

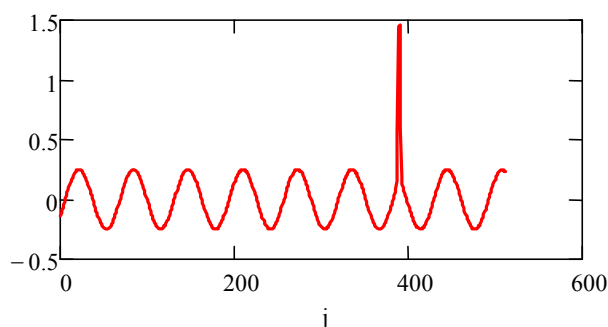
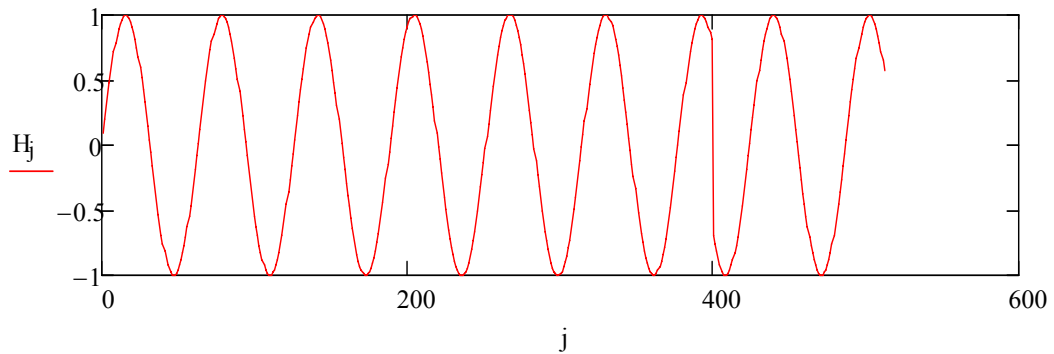


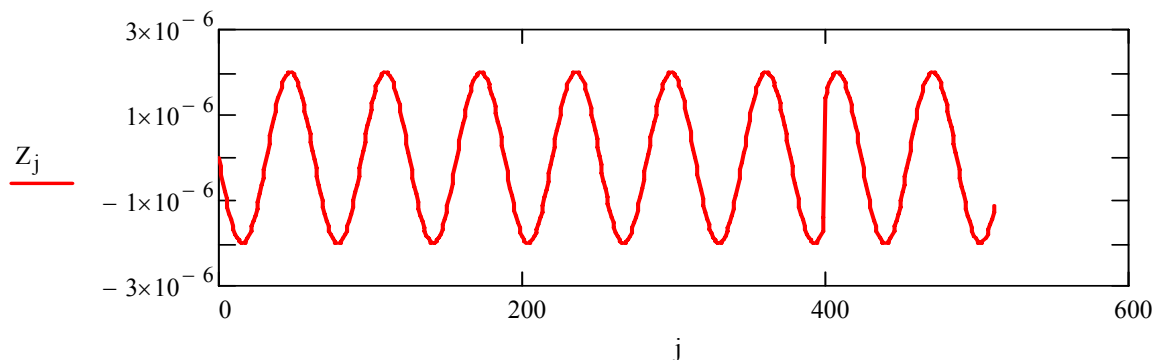
Рис.5.3. Разложение процесса с особенностью по WAVE-вейвлету.

Если же мы попробуем использовать другие базисы разложения для поиска этой особенности процесса, то результат будет не столь нагляден.

Например, на рис.5.4.а. и 5.4.б. приведены примеры, полученные при использовании вейвлетов Хаара и DOG, соответственно. Сбой по фазе на этих графиках виден, но ... картинка качественно от исходной не отличается. Для аппаратной реализации безусловно предпочтительней первый пример, поскольку задача детектирования локального максимума амплитуды с точки зрения технической не нова и методы её решения хорошо известны.



5.4.a



5.4.б.

Рис.5.4. Примеры разложения процесса с особенностью (рис.5.1.) по базисам вейвлетов Хаара и DOG.

Термин «вейвлет» был введен в научный оборот в середине 80-х годов Гроссманом и Морле в связи с анализом акустических и сейсмических сигналов. В русскоязычной литературе после нескольких попыток использовать тот или иной русский аналог или адекватный перевод (маленькая волна, волновой пакет, всплеск) стало общепринятым использование термина «вейвлет». Основная идея вейвлет-анализа заключается в том, чтобы для поиска локальной особенности использовать разложение по функциям, похожим на искомую особенность, т.е. также хорошо локализованным. Такой подход предполагает представление функции одной координаты в виде функции двух координат – пространственной и масштабной.

Рассмотрение вейвлет-анализа проведем, опираясь на уже изученное нами преобразование Фурье.

Пусть $L^2(0, 2\pi)$ - пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией (т.е. L_2 нормой)

$$L_2 = \|E\|_2 = \int_0^{2\pi} |E(x)|^2 dx < \infty, x \in (0, 2\pi). \quad (1.1)$$

Таким образом, мы определили $E(x)$ как кусочно-непрерывную функцию на $(0, 2\pi)$. Функция $E(x)$ может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ таким образом, что

$$E(x) = E(x - 2\pi), x \in R. \quad (1.2)$$

Здесь координата x может быть как временной, так и пространственной, равно как, $E(x)$ может быть функцией не одной, а двух переменных. Таким образом, мы определили функцию (5.2) как 2π периодическую функцию. Как мы уже знаем из курса математики, любая квадратично интегрируемая 2π периодическая функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp(jnx) \quad (1.3)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x) \exp(-jnx) dx$$

Как следует из (4.3), ортонормированный базис пространства $L^2(0, 2\pi)$ образуется масштабированием единственной функции $\exp(jx)$, т.е. базис образуют функции

$$\exp(jnx), n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Теперь введем пространство $L^2(R)$ функций $E(x)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$, и обладающих конечной энергией (нормой)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 dx < \infty. \quad (1.5)$$

Рассмотрим функциональные пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$. Из (4.5) следует, что локальное среднее значение каждой функции, принадлежащей

$L^2(R)$, должно стремиться к нулю на бесконечности. Этому требованию синусоида не удовлетворяет. Следовательно, семейство функций вида (5.4), т.е. синусоид, не может быть базисом пространства $L^2(R)$.

Введем некоторую функцию $\phi(x)$, удовлетворяющую (5.5). Более того, введем требование, чтобы функция $\phi(x)$ была хорошо локализованной, т.е. быстро стремилась к нулю. Для того, чтобы эта локализованная функция могла использоваться в качестве функции, порождающей базис разложения, необходим механизм, позволяющий покрыть этими функциями всю ось $R(-\infty, \infty)$. Простейший вариант покрытия – сдвиг базисной функции вдоль оси. Точнее, система сдвигов (или переносов) функции $\phi(x)$ вдоль оси $R(-\infty, \infty)$. Для простоты можно принять, что сдвиги будут целыми, тогда получим набор функций $\phi(x - \Delta)$, где $\Delta = \dots -1, 0, 1, \dots$. Таким образом, смещая функцию $\phi(x - \Delta)$ вдоль оси, т.е. придавая Δ различные значения, мы можем решить задачу определения пространственной локализации некоторой особенности исследуемого процесса, похожей на функцию $\phi(x)$. Обратим внимание на то, что искомая особенность процесса и функция $\phi(x)$ предполагаются похожими. Действительно, если мы знаем что именно мы ищем, т.е. предполагаем форму особенности процесса, то проводим поиск, сравнивая исследуемую реализацию процесса с той формой (сигналом), которую мы ищем. Соответственно, и в качестве функции, образующей базис разложения, целесообразно выбрать функцию, похожую на искомую особенность.

Далее, нам необходим механизм не только пространственного, но также и частотного анализа – искомые особенности процесса могут различаться масштабом. Для этого введем в дополнение к сдвигу также и масштабирование аргумента функции, которое, опять-таки для простоты, представим в виде целых степеней двойки, т.е. $\phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа. В результате, имея единственную функцию $\phi(x)$ и применяя к ней дискретные масштабные преобразования $\frac{1}{2^i}$ и сдвиги $\frac{\Delta}{2^i}$, мы можем покрыть семейством полученных функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta)$ как всю частотную, так и всю пространственную оси.

Обратим внимание, что если $E(x)$ функция одной переменной, то её представление в виде семейства функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ будет определено уже на плоскости, образуемой осями i (масштаб) и Δ (сдвиг или пространственная локализация). Т.е., как мы и указали во введении к теме, речь идет о преобразовании функции одной переменной в функцию двух переменных.

Из определения L_2 нормы, т.е.

$$L_2 = \|\phi\|_2 = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2},$$

$$\langle \phi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi^*(x) dx \quad (1.6)$$

Следует, что

$$\|\phi(2^i x - \Delta)\|_2 = 2^{-i/2} \|\phi(x)\|_2. \quad (1.7)$$

Иными словами, если функция $\phi(x) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то и все функции семейства $\{\phi_{i\Delta}\}$ также нормированы на единицу.

Если семейство $\{\phi_{i\Delta}\}$, определенное соотношением $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа, удовлетворяет условию

$$\langle \phi_{i\Delta}, \phi_{k\epsilon} \rangle = \delta_{i\Delta}, \delta_{k\epsilon}, \quad (1.8)$$

и каждая функция $\phi(x) \in L^2(R)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося в $L^2(R)$ ряда, т.е. представляет собой ортонормированный базис пространства $L^2(R)$, то функция $\phi(x) \in L^2(R)$ ортогональна.

Функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям, и подпадающих под определение вейвлета как «маленькой волны», может быть много. Задача исследователя – выбрать функцию, наилучшим образом соответствующую исследуемому процессу, явлению. Таким образом, вейвлет-анализ дает, по сравнению с анализом Фурье, существенно большую гибкость в выборе инструмента исследования или представления.

. Понятие вейвлета позволяет выбрать, либо придумать конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Построим базис пространства $L^2(R)$ посредством непрерывных переносов и масштабирования вейвлета $\phi(x) \in L^2(R)$ с произвольными значениями коэффициента масштабирования i и параметра сдвига Δ :

$$\phi_{i\Delta}(x) = |i|^{-1/2} \phi\left(\frac{x - \Delta}{i}\right), \quad i, \Delta \in R, \quad \phi \in L^2(R). \quad (1.9)$$

Используя базис (5.9), введем, по аналогии с преобразованием Фурье, интегральное вейвлет преобразование:

$$\begin{aligned}
W_{\phi}(E(x)) &= W_{\phi}(i, \Delta) = |i|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi^*\left(\frac{x-\Delta}{i}\right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi_{i,\Delta}^*(x) dx
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, мы представили функцию $E(x)$ в виде суммы вейвлетов $\phi_{i,\Delta}(x)$ разного масштаба i и сдвига Δ .

Определение вейвлета.

Введем определение R-функции. Функция $\phi(x) \in L^2(R)$ называется R-функцией, если базис $\{\phi_{i,\Delta}\}$, определенный выражением (5.9), является базисом Рисса в том смысле, что существуют две константы A и B ,

$$0 < A \leq B < \infty,$$

для которых соотношение

$$A \|\{c_{i,\Delta}\}\|_2^2 \leq \left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} c_{i,\Delta} \phi_{i,\Delta} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{i,\Delta}\}\|_2^2 \tag{1.11}$$

выполняется при любой ограниченной и дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{i,\Delta}\}$:

$$\|\{\{c_{i,\Delta}\}\}\|_2^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} |c_{i,\Delta}|^2 < \infty, \tag{1.12}$$

где $\{c_{i,\Delta}\}$ - коэффициенты разложения функции $E(x)$ в ряд по вейвлетам (5.10)

$$c_{i,\Delta} = W_{\phi}\left(\frac{1}{2^i}, \frac{\Delta}{2^i}\right) \tag{1.13}$$

Тогда вейвлет можно определить как любую локализованную R-функцию $\phi(x) \in L^2(R)$ если для неё существует функция $\phi^*(x) \in L^2(R)$, которую будем называть парой или двойником, такая, что выполняется

$$\begin{aligned}
\phi_{i,\Delta}(x) &= 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta) \\
\phi^{i,\Delta}(x) &= \phi_{i,\Delta}^*(x) = 2^{i/2} \phi^*(2^i x - \Delta), \quad i, \Delta \in I
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Перечислим некоторые признаки вейвлета:

1. Локализация. В отличие от преобразования Фурье, вейвлет хорошо локализован не только в частотном пространстве, но и во временном (или пространственном).
2. Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 0. \quad (1.15)$$

3. Ограниченность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty. \quad (1.16)$$

Свойства локализации и ограниченности могут быть совместно выражены следующим образом:

$$|\phi(x)| < (1 + |x|^n)^{-1}. \quad (1.17)$$

4. Автомодельность базиса или свойство самоподобия – поскольку все вейвлеты базиса получаются из порождающего из фейвлета посредством масштабирования и сдвига, то и являются его масштабированными и сдвинутыми копиями.

Простейший пример вейвлета – вейвлет Хаара, определяемый следующим образом:

$$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

Этот вейвлет был использован для неудачной попытки поиска особенности процесса рис.5.1., приведенной на рис.5.4.б. Графики рис.5.3 и 5.4., приведенные в начале лекции, наглядно иллюстрируют важность правильного выбора базисного вейвлета. В первом приближении, вейвлет, формирующий базис, должен быть похож на искомую особенность.

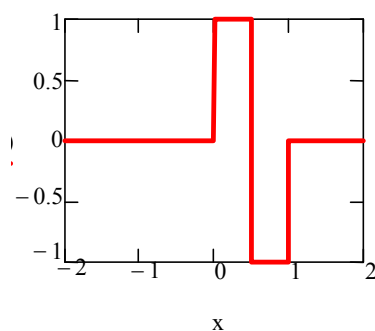
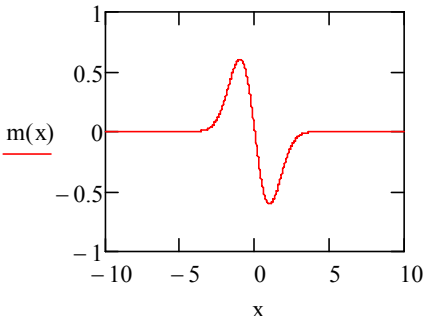
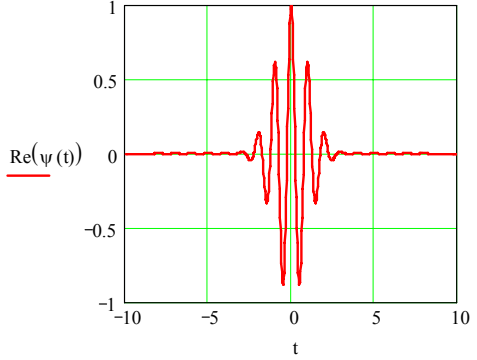


Рис.5.5. Вейвлет Хаара

Некоторые, наиболее часто встречающиеся примеры вейвлетов, приведены в Табл.5.1. Понятие вейвлета позволяет выбрать, либо придумать самому конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Таблица.5.1. Примеры вейвлетов.

Название вейвлета	Формула	Графическое изображение
Вейвлет Хаара (Haar)	$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases}$	
Французская шляпа (French hat)	$y(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \text{if } \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$	
DOG-вейвлет (Difference of Gaussians)	$z(x) := \exp\left[\frac{-(x)^2}{2}\right] - 0.5 \exp\left[\frac{-(x)^2}{8}\right]$	

WAVE-вейвлет	$m(x) := \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	
Вейвлет Морле	$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right) \cdot \left[\exp(iw_0 t) - \exp\left(-\frac{w_0^2 a^2}{4}\right) \right]$ Его образ Фурье $\Psi(w) = a\sqrt{\pi} \left[\exp\left(-\frac{a^2(w_0 - w)^2}{4}\right) - \exp\left(-\frac{a^2(w_0 + w)^2}{4}\right) \right]$	Действительная часть вейвлета Морле 

Ниже приведем более полную таблицу аналитических описаний, классифицировав основные вейвлеты по ряду признаков.
Таблица 5.2.

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\Psi(w)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы вейвлеты		
Вейвлет первого порядка - WAVE вейвлет	$t \cdot \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$	$(iw) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]$
Вейвлет второго порядка - МНАТ – вейвлет	$(1-t^2) \cdot \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$	$(iw)^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]$

Вейвлет n-го порядка	$(-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right],$	$(-1)^n \cdot (iw)^m \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$
DOG – вейвлет	$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$	$\sqrt{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) - \exp(-2w^2) \right]$
LP – Littlewood & Paley	$(\pi \cdot t)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, \text{ в других случаях} \end{cases}$
Вещественные дискретные базисы		
HAAR -вейвлет	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$i \exp\left(\frac{iw}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{w}{4}\right)}{\frac{w}{4}}$
FNAT - вейвлет	$\begin{cases} 1, & t \leq 1/3 \\ -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$\frac{4}{3} \frac{\sin^3\left(\frac{w}{3}\right)}{\frac{w}{3}}$
Комплексные базисы		
Вейвлет Морле	$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp[iw_0 t]$	$a\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{a^2(w_0 - w)^2}{4}\right)$
Вейвлет Пауля	$\Gamma(m+1) \frac{i^m}{(1-it)^{m+1}}$	$\Theta(w)(w)^m \exp(-w)$

Некоторые примеры применения вейвлет-анализа.

Поскольку вейвлет-анализ дает не только информацию о спектральном составе исследуемого процесса, как анализ Фурье, но также и информацию об изменении спектрального состава во времени или пространстве, то он нашел применение в первую очередь при анализе нестационарных процессов. Результат вейвлет-анализа часто называют вейвлет-спектром или масштабно-временным спектром. Поскольку вейвлет-спектр функции от одной координаты представляет собой функцию двух координат, то часто он изображается в виде проекции этой трехмерной поверхности на плоскость с изображением изолиний, как это представлено на рис.5.6.б. Картину, составленную из линий, изображающих экстремумы этих поверхностей приведенную на рис.5.6.в., принято называть скелетоном. На рис.5.6.б. темные области соответствуют положительным, а светлые – отрицательным значениям.

Рассмотрим некоторые простые случаи для того, чтобы наглядно увидеть сильные стороны вейвлет-анализа. На рис.5.7 и 5.8. приведен разные случаи сигнала – суммы двух синусоид.

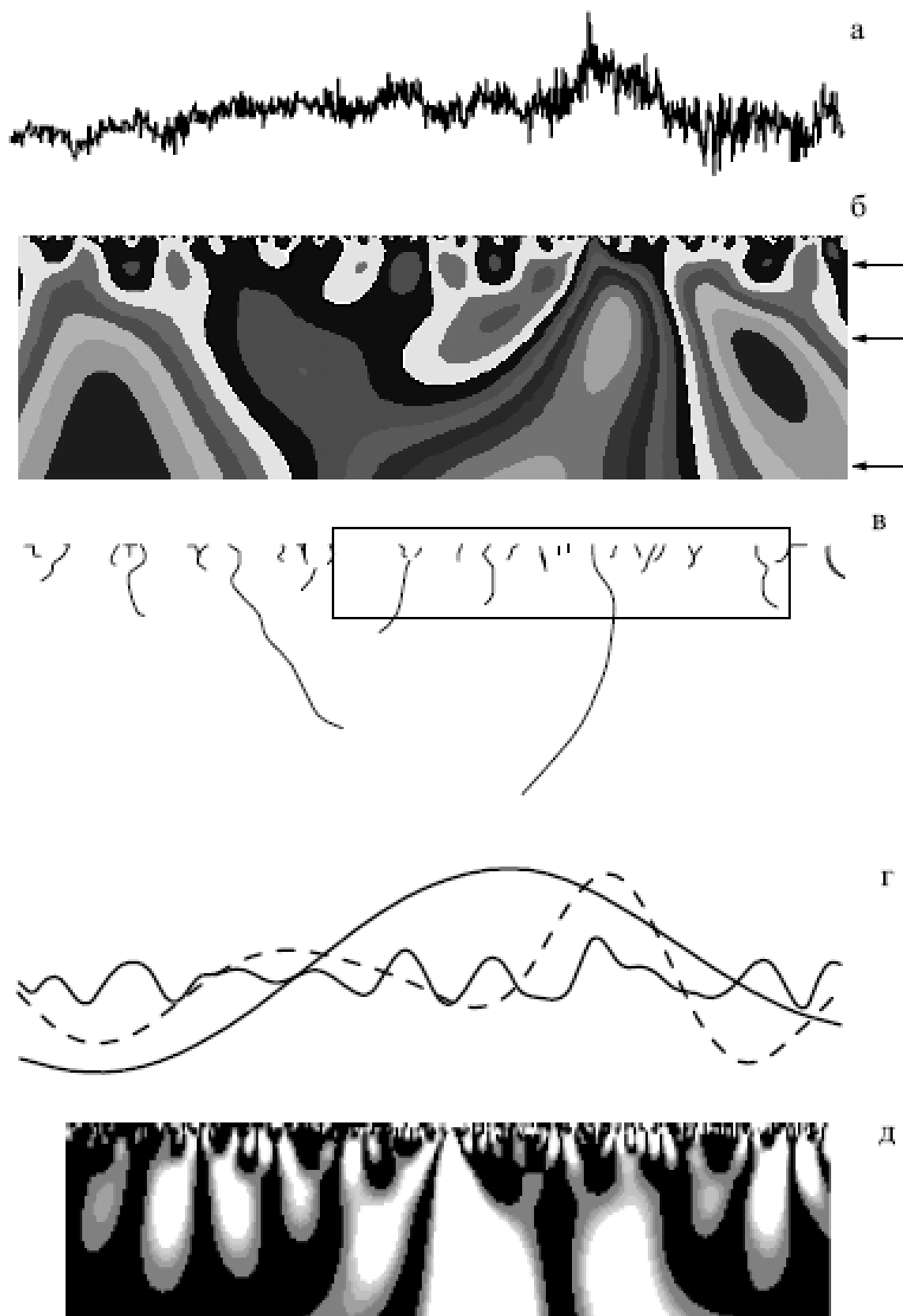


Рис.5.6. Временной ряд потоков ионов солнечного ветра (5.6.а), его вейвлет-спектр (5.6.б.) при разложении по МНАТ-вейвлету, его скелетон

(5.6.в.), зависимость коэффициентов вейвлет-разложения от времени при значениях масштаба, отмеченных стрелками (5.6.г.) и распределение плотности энергии для фрагмента в рамке на 5.6.в. (5.6.е.). Копия из [1].

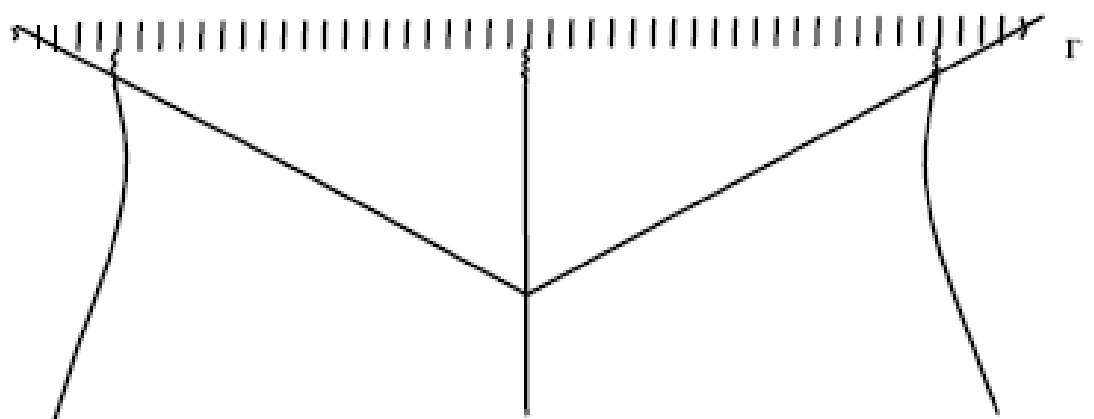
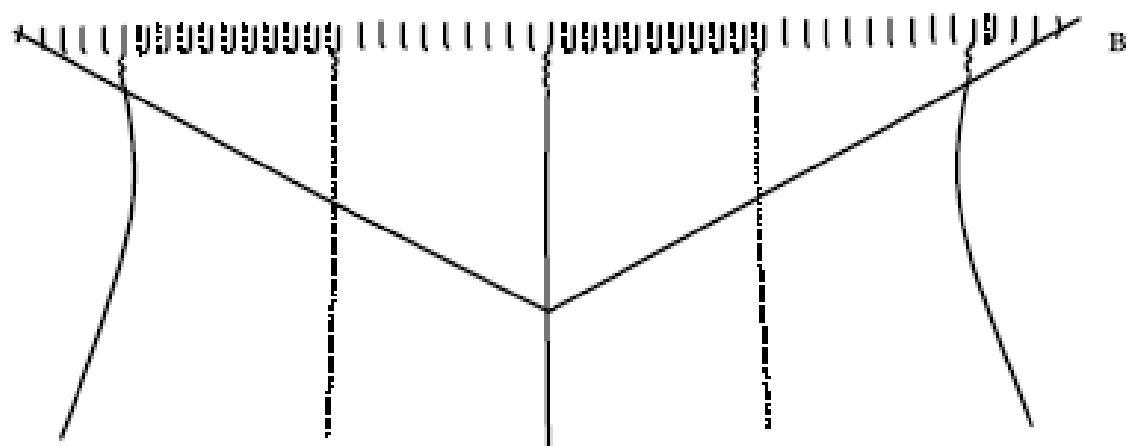
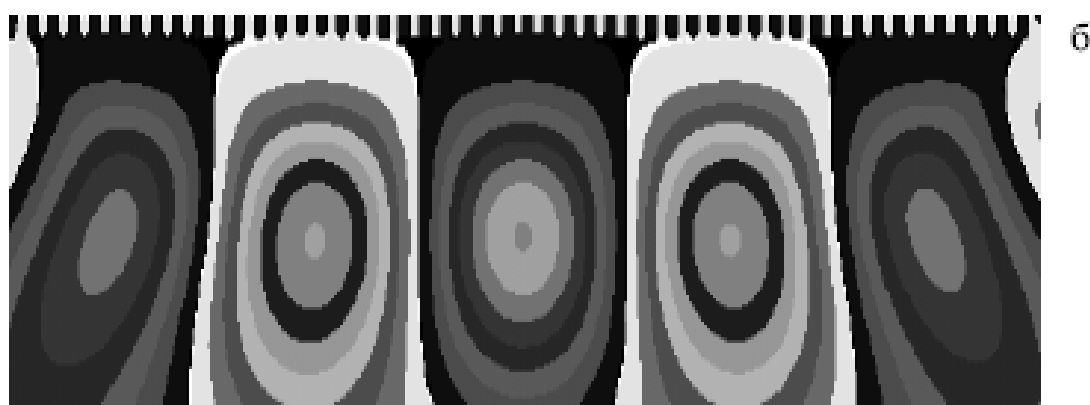
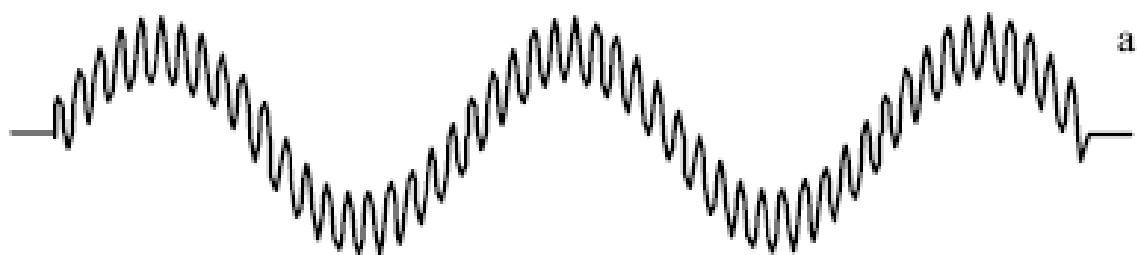


Рис.5.7.а. – сигнал, состоящий из суммы двух синусоид, его вейвлет-спектр (5.7.б), линии локальных экстремумов (5.7.в) и линии локальных минимумов (5.7.г.) Копия из [1].

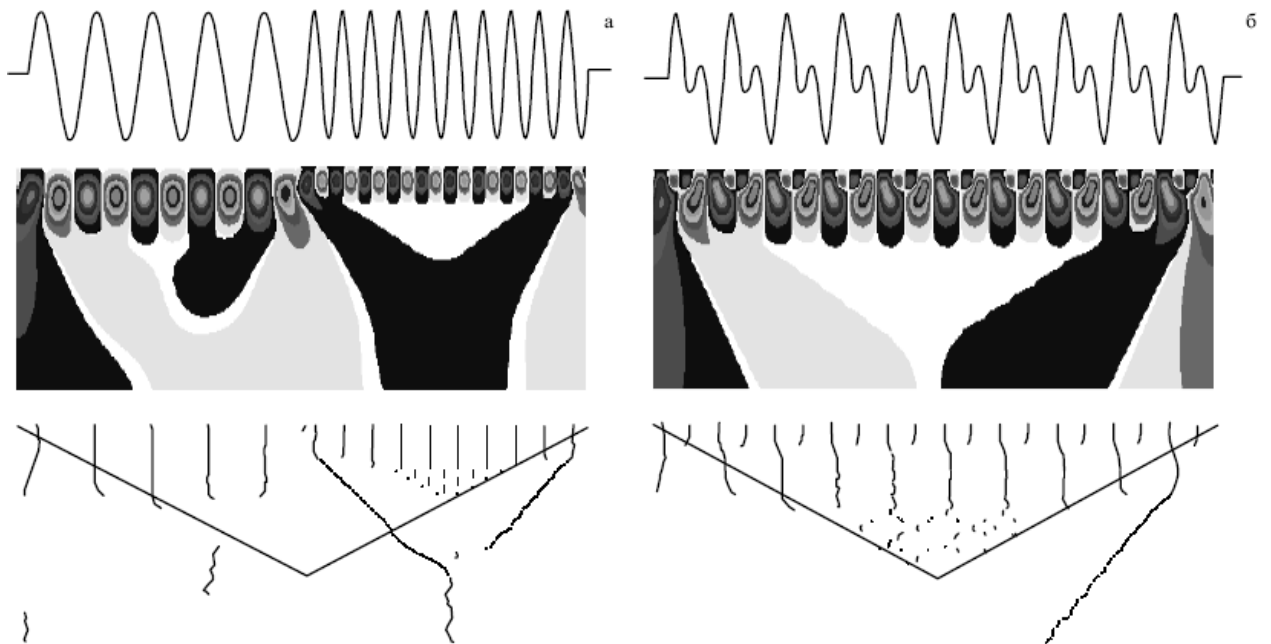


Рис.5.8. Два сигнала, представляющие собой сумму двух гармоник – на рис.5.8.а. гармоники разной частоты предъявляются последовательно, на рис.5.8.б. – параллельно. Классический анализ Фурье не позволяет отличить один случай от другого, вейвлет-анализ позволяет различить эти случаи без труда. Копия из [1].

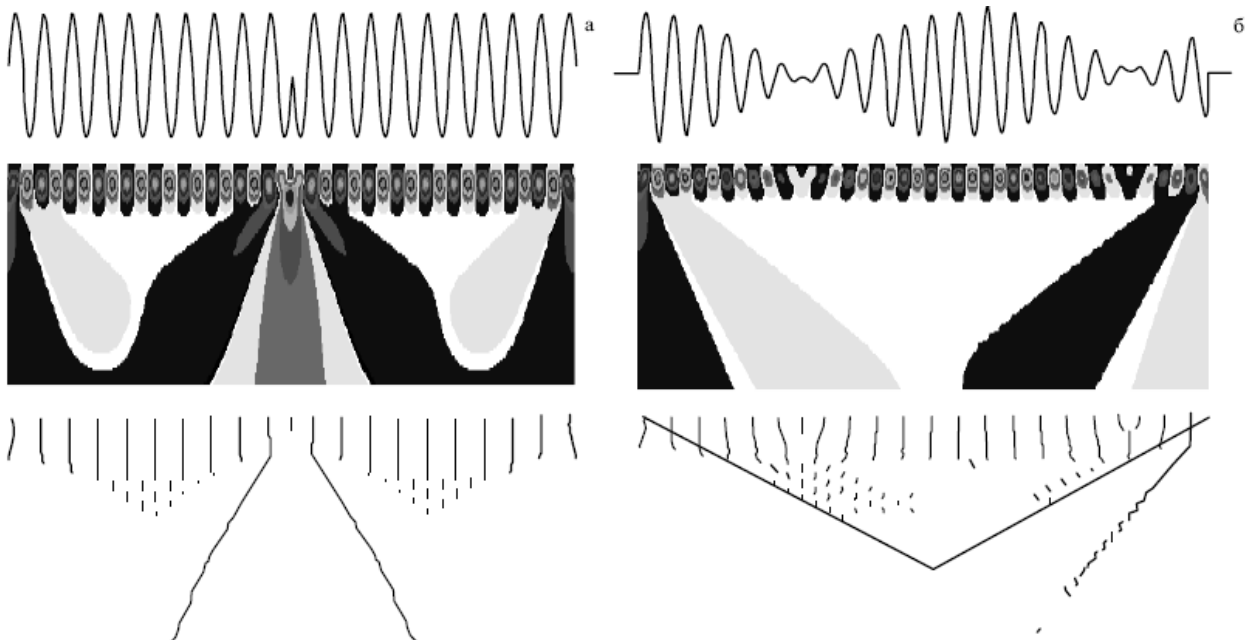


Рис.5.9.. – сигналы со сбоем фазы и их вейвлет-спектры. Копия из [1].

Рис.5.10 иллюстрирует возможность выявления с помощью вейвлет-анализа фрактальной структуры исследуемого процесса.

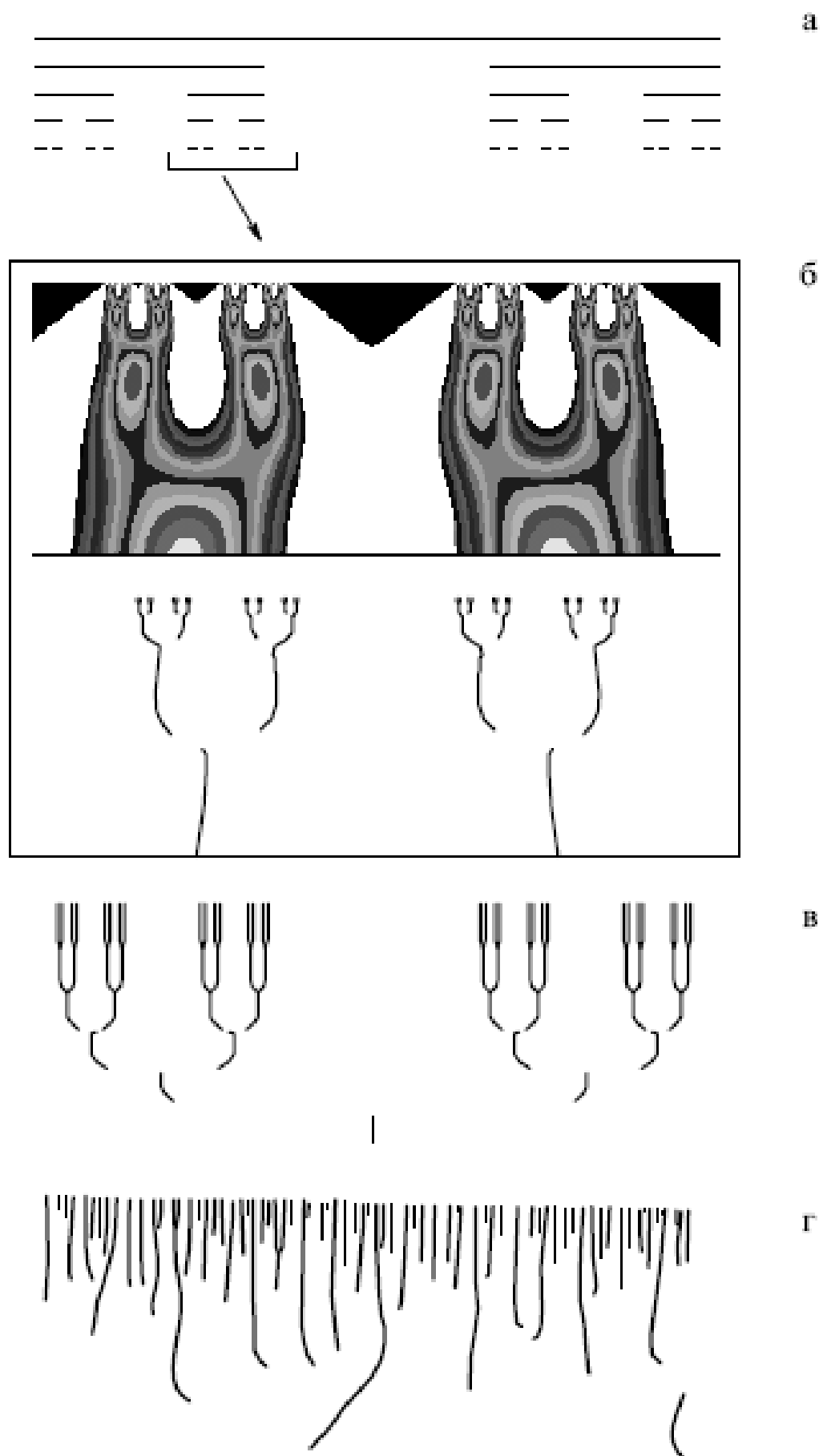


Рис.5.10. Фрактальное множество «Пыль Кантора» и его вейвлет-спектр. На рис.5.10.г. скелетон случайного процесса. Копия из [1].

Интересно применение вейвлет-анализа для анализа метеорологических явлений и выявление различных циклов. Например, на рис.5.11 приведен временной ряд метеорологического явления Эль-Ниньо и его вейвлет-спектр, позволяющий выявить периодические явления на отдельных временных промежутках и, тем самым, проследить глобальные закономерности.

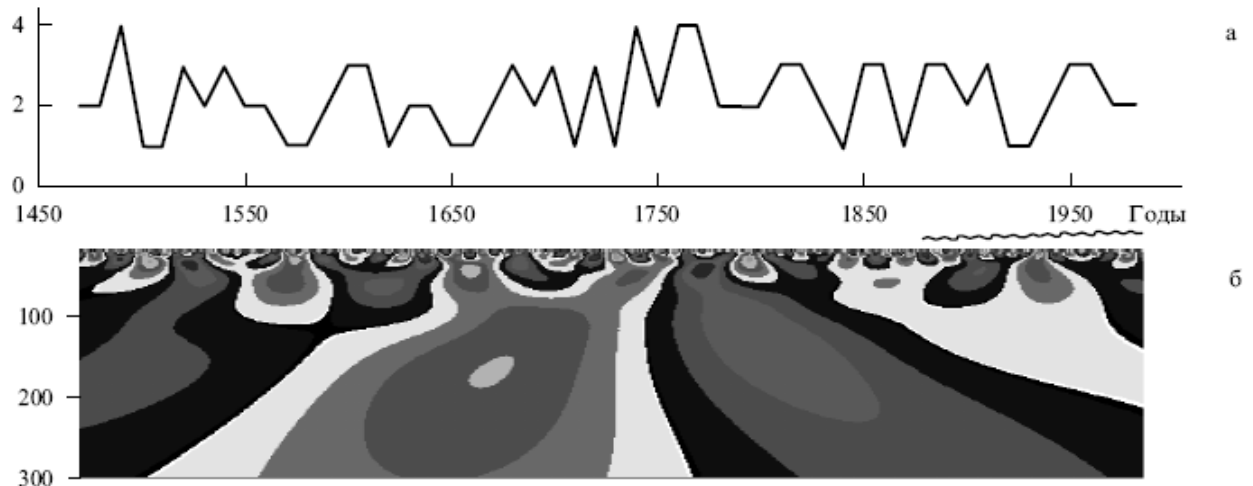


Рис.5.11 временной ряд м Эль-Ниньо и его вейвлет-спектр на протяжении 500 лет наблюдений. Копия из [1].

Нетрудно видеть, что вейвлет анализ представляет собой вычислительно затратную процедуру. Поэтому представляет интерес возможность реализации вейвлет-анализа оптическими методами. Подход к оптической реализации вейвлет-анализа основан на том, что выражение (5.10) представляет собой свертку анализируемой функции с некоторым ядром, определяемым выбранным вейвлетом. Следовательно, для выполнения вейвлет-анализа может быть применена схема оптического конволвера или коррелятора, т.е. схема 4-f голографии Фурье. Поскольку в (5.10) используется комплексное сопряжение, то естественно использовать схему, основанную на схеме голографического коррелятора.

Схема оптического устройства, реализующего вейвлет-преобразование, приведена на Рис.5.11. Здесь 1 – лазер, 2 – оптическая система, формирующая параллельный пучок света (коллиматор), 3 – входная плоскость, в которую помещается транспарант с анализируемым сигналом, представленным как зависимость пропускания от координаты x . Цилиндрическая линза L_1 выполняет одномерное преобразование Фурье этого сигнала. На маске 4 записаны Фурье-образы базиса вейвлет-преобразования. Поскольку Фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то маска 4 изготавливается по голографической технологии, подобно тому, как записывается голографический согласованный фильтр в схеме коррелятора Ван дер Люгта. Таким образом, в плоскости 4 выполняется умножение Фурье-образа анализируемого сигнала на Фурье-образ базисного вейвлета. Поскольку необходимо обеспечить перебор различных масштабов, то в плоскости 4 по

вертикальной оси пространственно разнесены несколько Фурье-образов базисного вейвлета, каждый из которых отличается своим масштабом.

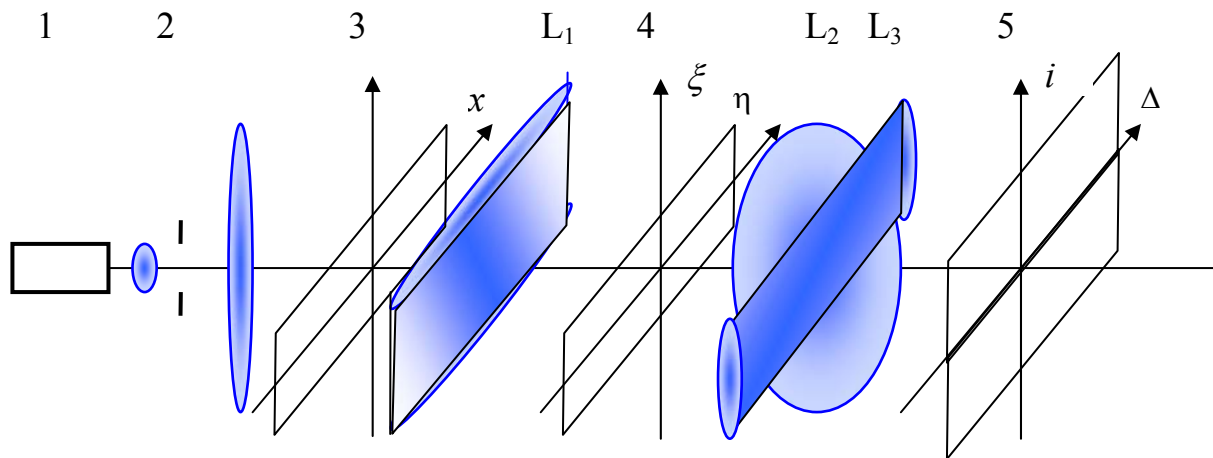


Рис.5.11. Схема оптического вейвлет-анализатора

Система из сферической линзы L_2 и цилиндрической L_3 выполняет преобразование Фурье по одной координате и проекцию изображения по другой – в плоскости 5 формируется картина (двумерная!) разложения анализируемого сигнала по заданному базису.

Литература к Теме 5.

1. Н.М.Астафьева. Вейвлет-анализ: основы теории и применения. Успехи физических наук, т.166, №11, с.1145-1170 (1996)
2. И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло, Вейвлеты и их использование. Успехи физических наук, т.171, №5, с.467-500 (2001)
3. А.П.Петухов, Введение в теорию базисов всплесков, СПб ГТУ, 1999.
4. А.Н.Яковлев. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирский ГТУ, 2003.
5. В.Ю.Петрунькин, Е.Т.Аксенов, Г.А.Стариков, Оптический вейвлет-процессор для обработки сложных сигналов. Письма в ЖТФ, 2001, т.27, вып.22, с.24-29.