

**Учреждение образования
«Высший государственный колледж связи»
Факультет электросвязи**

Кафедра Программное обеспечение сетей телекоммуникаций

КУРС: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА РЕЧИ И ИЗОБРАЖЕНИЯ

для специальности:

1-45 01 03

Сети телекоммуникаций

Лекция № 12. Вейвлет-преобразования речи и изображений (4 часа)

Подготовил:
ст.преподаватель кафедры ПОСТ
Киркоров С.И.
на основе лекции Борискевича А.А.

Минск 2010

Лекция № 12. Вейвлет-преобразования речи и изображений (4 часа).**12.1 Интегральное вейвлет-преобразование**

Важнейшим средством спектрального анализа непериодических сигналов является интегральное преобразование Фурье, которое вычисляется как скалярное произведение сигнала $s(t)$ с комплексными экспонентами или синусоидами $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (12.1)$$

где $S(\omega)$ – преобразование Фурье или спектральная функция сигнала $s(t)$.

Из (12.1) видно, что спектральный коэффициент вычисляется путем умножения временного сигнала $s(t)$ на комплексную синусоиду с частотой ω и интегрирования в пределах всего времени. Чтобы преобразование было применимо, сигнал $s(t)$ должен удовлетворять следующим требованиям: должны выполняться условия Дирихле и сигнал должен быть абсолютно интегрируемым, т.е. существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$. Подобные условия значительно сужают класс допустимых сигналов.

С практической точки зрения непрерывное преобразование Фурье имеет ряд недостатков. Во-первых, для получения преобразования требуется вся временная информация. Поскольку частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности, то для получения высокочастотной информации с достаточной точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала, и наоборот, низкочастотную спектральную информацию – извлекать из относительно широких временных интервалов сигнала. Во-вторых, частотное наполнение сигнала известно, но появление частотных составляющих во времени не известно. Таким образом, данное преобразование позволяет увидеть частотное наполнение сигналов, но не позволяет определить, в какой момент времени существует та или иная частота. Поэтому преобразование Фурье непригодно для анализа нестационарных сигналов, в которых в разные моменты времени присутствуют различные частотные компоненты. В стационарных же сигналах все частотные компоненты присутствуют в течение всего времени, т.е. различные частоты имеются на всем временном интервале. Преобразование Фурье может использоваться для анализа нестационарных сигналов, когда важна лишь частотная информация, а время существования спектральных составляющих неважно.

Для частотно-временной локализации структурных элементов сигнала используется кратковременное, или оконное, преобразование Фурье:

$$S(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} w(t - b) dt, \quad (12.2)$$

где $S(\omega, b)$ – преобразование Фурье сигнала $s(t)$, умноженного на оконную (локальную) функцию $w(t-b)$.

Таким образом, $S(\omega, b)$ – разложение сигнала по семейству функций $w(t - b)e^{i\omega t}$, образованному из единственной функции с помощью переносов b по времени и переносов ω по частоте. Преобразование становится зависимым от времени, и в результате получается частотно-временное представление сигнала. Данный подход позволяет определить факт присутствия в сигнале любой частоты и интервал ее присутствия. Это значительно расширяет возможности метода по сравнению с классическим преобразованием Фурье, но существуют и определенные недостатки. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, при использовании данного преобразования нельзя утверждать факт наличия частоты ω_0 в сигнале в момент времени t_0 – можно лишь определить, что определенный спектр частот (ω_1, ω_2) присутствует в интервале (t_1, t_2) . Таким образом, в результате спектрального анализа можно определить только временные интервалы, в течение которых в сигнале существуют полосы частот. Эта проблема называется проблемой разрешения. Данная проблема связана с шириной использующейся оконной функции. Эта ширина называется еще носителем функции. Если окно достаточно узкое, то говорят о компактном носителе. Узкое окно обеспечивает лучшее временное разрешение, а широкое – лучшее частотное. Проблема состоит в том, что приходится выбирать окно с фиксированной шириной для анализа всего сигнала, тогда как разные его участки могут требовать применения разных окон.

Интегральное вейвлет-преобразование дает сходное частотно-временное описание с некоторыми существенными отличиями и представляет собой скалярное произведение сигнала $s(t)$ и двухпараметрической вейвлет-функции $\psi_{a,b}(t)$ заданного вида. Причем любая вейвлет-функция $\psi_{a,b}(t)$ данного семейства получается из единственной материнской функции ψ путем растяжения/сжатия и сдвига $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Термин «материнский» означает, что функции с различной шириной носителя, используемые в преобразовании, порождаются одной базовой функцией – материнским вейвлетом. Интегральное вейвлет-преобразование функции $s(t)$ имеет вид

$$S_{\psi}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{a,b}(t) dt, \quad (12.3)$$

где a – параметр временного масштаба, определяемый как $(1/\text{частота})$ и отвечающий за ширину вейвлета, b – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси времени.

Нормализация ψ на множитель $|a|^{-1/2}$ гарантирует, что интегральная энергия каждого вейвлета $\psi_{a,b}(t)$ не зависит от a . Для вейвлет-преобразования анализирующая функция $\psi_{a,b}(t)$ получается из одной материнской (или порождающей) функции $\psi(t)$, причем большие значения a соответствуют низким частотам, малые – высоким. Двухпараметрическая функция $S_{\psi}(a, b)$ дает

информацию об изменении относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования. Масштаб является в определенном смысле аналогом частоты в Фурье-преобразовании. Однако в отличие от него каждому значению масштаба соответствует бесконечное количество сдвинутых друг относительно друга локализованных во времени вейвлет-функций. Довольно грубо можно представить вейвлеты как некоторые волновые функции (модулированные импульсами синусоиды), способные осуществлять преобразование Фурье не по всей временной оси, а локально по месту своего расположения. Для этого, кроме изменения средней частоты, маленькие волны должны перемещаться к тому месту сигнала, в котором должно осуществляться локальное преобразование Фурье.

Сущность интегрального вейвлет-преобразования заключается в разбиении сигнала $s(t)$ на масштабированные и сдвинутые по оси времени версии материнского вейвлета и вычислении коэффициентов корреляции участков исходного сигнала $s(t)$ и версий вейвлета $\psi_{a,b}(t)$ на заданном масштабе. В результате получается набор коэффициентов, показывающих, насколько поведение сигнала в данный момент времени похоже на поведение вейвлета на данном масштабе, т.е. вейвлет-коэффициенты отражают близость сигнала к вейвлету данного масштаба. Чем ближе вид анализируемого сигнала в окрестности данного момента времени к виду вейвлета, тем большую абсолютную величину имеет соответствующий коэффициент. Отрицательные коэффициенты показывают, что сигнал похож на зеркальное отражение вейвлета. Таким образом, данное представление зависит от параметра масштаба a и вида функции $\psi_{a,b}(t)$, причем вейвлет-коэффициенты содержат информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале.

На рис.12.1,б представлено разбиение частотно-временной плоскости для оконного преобразования Фурье, а на рис.12.2,б – для интегрального вейвлет-преобразования.

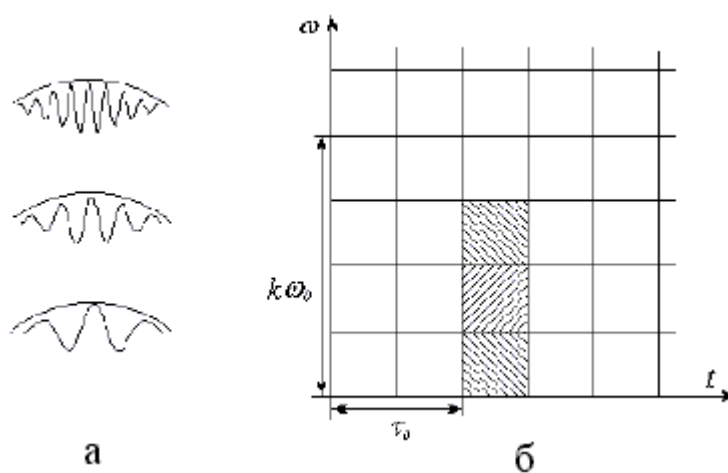


Рис.12.1. Оконное преобразование Фурье в плоскости время-частота:

а – пример базисных функций $e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0)$ при сдвиге τ_0 и $k=1,2,3$ (действительная часть); б – условное изображение базисных функций при заданных k (заштрихованные прямоугольники)

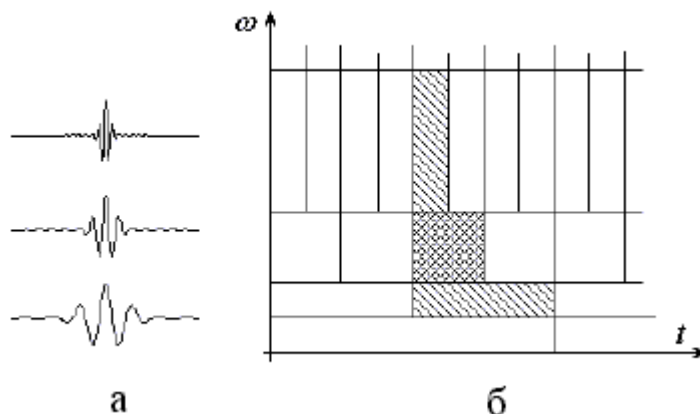


Рис.12.2. Вейвлет-преобразование в плоскости время-частота:

а – пример базисных вейвлет-функций при различных масштабах: ($a=2^k$, $k=0,1,2$);

б – условное изображение вейвлет-функций на заданном масштабе (заштрихованные прямоугольники)

В соответствии с принципом неопределенности сужение окна анализа во временной области вызывает расширение его в частотной. Таким образом, площадь окна (прямоугольника) остается постоянной. При оконном преобразовании Фурье окно анализа строго локализовано по времени и частоте, а при непрерывном вейвлет-преобразовании локализация изменяется в зависимости от масштаба. Деление t и b на масштабный коэффициент позволяет сохранить относительную плотность расположения базисных функций по оси t при расширении/сжатии самой функции и при $b/a = \text{const}$. Каждый прямоугольник (рис.12.2) соответствует значению вейвлет-преобразования на частотно-временной плоскости. Все точки, принадлежащие одному прямоугольнику, представляются одним значением вейвлет-преобразования. Прямоугольники разной ширины и высоты имеют одинаковую площадь. На нижних частотах высота прямоугольников меньше (что соответствует лучшему разрешению по частоте), а ширина прямоугольников больше (что соответствует худшему разрешению по времени). На высоких частотах разрешение по времени улучшается, а по частоте - ухудшается. Таким образом, вейвлет-преобразование позволяет получить хорошее разрешение по времени (плохое по частоте) на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте (плохое по времени) на низких частотах. Этот подход становится особенно эффективным, когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и протяженные низкочастотные компоненты. В случае оконного преобразования Фурье частотно-временная плоскость состоит из прямоугольников одинакового размера.

Из (12.2) и (12.3) видно, что оба преобразования представляют скалярное произведение $s(t)$ и семейства функций, снабженных двумя

индексами, $w(t-b)e^{i\omega t}$ и $\psi_{a,b}(t)$. Когда a меняет свои значения, то $\psi_{a,0}(t)$ меняет свою частоту. Причем большие значения параметра $|a|$ соответствуют малым частотам или большому масштабу, а малые параметры $|a|$ соответствуют высоким частотам или мелкому масштабу. Различие между вейвлет-преобразованием и оконным преобразованием Фурье состоит в форме анализирующих функций $\psi_{a,b}(t)$ и $w_{\omega,b}(t) = w(t-b)e^{i\omega t}$. Все функции $w_{\omega,b}(t)$, вне зависимости от значения ω , имеют одну и ту же ширину во времени. Наоборот, все $\psi_{a,b}(t)$ имеют ширину во времени, соответствующую частоте ω : высокочастотные $\psi_{a,b}(t)$ являются узкими, низкочастотные $\psi_{a,b}(t)$ – широкими.

Важным различием является то, что в случае вейвлет-преобразования в наиболее общей постановке не конкретизируется не только сам порождающий вейвлет, но и то, какие его копии участвуют в разложении. Таким образом, термин вейвлет-преобразование является обозначением целого класса разложений. Преобразование Фурье является разложением по фиксированной системе функций.

При базисных параметрах (a,b) обратное вейвлет-преобразование имеет вид

$$s(t) = C_{\psi}^{-1} \iint S_{\psi}(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (12.4)$$

$$\text{где} \quad C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(-i\omega t) dt \right| |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$, нормализующему преобразование Фурье), зависящий от используемой вейвлет-функции.

Условие конечности константы C_{ψ} ограничивает класс функций $\psi(t)$, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов. Из определения C_{ψ} следует, что Фурье-образ $\psi(\omega)$ должен быть равен нулю в начале координат $\omega=0$ и, следовательно, должен быть равен нулю по крайней мере нулевой момент:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (12.5)$$

Условие (12.5) не накладывает много ограничений, так как может быть найдено множество вейвлет-функций, удовлетворяющих (5).

Признаками, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом, являются следующие.

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во времени, и по частоте. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия $|\psi(t)| \leq C(1+|t|)^{-1-\varepsilon}$ и $|\psi(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^{-1-\omega}$, где $\varepsilon > 0$.

Нулевое среднее. Среднее значение вейвлета должно быть равным нулю (12.5), т.е. значения функции быстро сходятся к нулю при увеличении абсолютного значения аргумента. Это условие является общим для всех вейвлетов. Оно называется условием осцилляций, или знакопеременности. Налагаемое на функцию $\psi(t)$ условие (12.5) означает, что $\psi(\omega = 0) = 0$. В силу чего Фурье-образ смещен по оси времени и будет расположен вокруг некоторой ненулевой частоты ω_0 , которую можно рассматривать как среднюю круговую или центральную частоту вейвлета, которая определяет положение пика Фурье-образа вейвлета на оси частот.

В частотной области спектры многих вейвлетов напоминают всплеск, пик которого приходится на частоту ω_0 . Если приближенно трактовать вейвлет как модулированную синусоиду, то ее частота и будет средней частотой вейвлета.

Часто для практических приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и все первые p моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0, \quad (12.6)$$

где $p = 0, 1, \dots, M-1$ (M – число нулевых моментов). Это условие ортогональности вейвлета полиномам до степени $M-1$, определяющее его гладкость и знакопеременность. Такой вейвлет называется вейвлетом p -го порядка. Он позволяет анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся (полиномиальные) его составляющие сигнала вида $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{M-1} t^{M-1}$. Порядок применяемых вейвлетов зависит от формы исходного сигнала: в случае наличия сильных флуктуаций лучше брать низкий порядок вейвлета, для более гладких сигналов следует применять вейвлеты высокого порядка. Выбор порядка вейвлета определяется гладкостью сигнала, требуемым уровнем сжатия и стоимостью вычислений, которая растет с ростом порядка.

Ограниченность. Вейвлет должен быть достаточно быстро убывающей функцией временной переменной:

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (12.7)$$

Автомодельность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{a,b}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов.

Основной при работе с вейвлет-преобразованием является проблема выбора наиболее подходящего вейвлета. Выбор конкретного семейства вейвлетов диктуется прикладными задачами и типом информации о сигнале, который требуется максимально проявить (распознать). Не существует каких-то жёстких правил, но лучше всего выбирать вейвлет таким образом, чтобы он принадлежал такому же классу функций, что и анализируемый сигнал. Если исходную функцию можно аппроксимировать полиномом, то количество

нулевых моментов вейвлета должно примерно равняться степени полинома. В качестве возможных критериев для выбора конкретного вейвлета можно использовать число нулевых моментов вейвлета и число вейвлет-коэффициентов, превышающих некоторое пороговое значение.

Число нулевых моментов более важно для достижения более высокого коэффициента сжатия сигнала, который при большом числе нулевых моментов увеличивается. Гладкость вейвлета становится важнее при обратном преобразовании, когда необходимо сгладить ошибки, вызванные сжатием (отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов).

Располагая вейвлет-спектром, можно рассчитать полную энергию сигнала

$$E_s = \int s^2(t)dt = \iint S_{\psi}^2(a,b) \frac{dad b}{a^2} \quad (12.8)$$

и глобальный спектр энергии - распределение полной энергии по масштабам (скейлограмму вейвлет-преобразования)

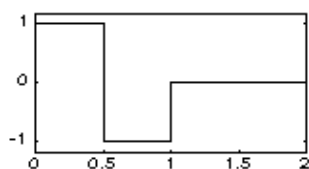
$$E_s(a) = \int S_{\psi}^2(a,b)db. \quad (12.9)$$

Скейлограмма соответствует спектру мощности Фурье-преобразования сигнала, сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета: $E_s(a) = \int |\hat{s}(\omega)\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$, где знак ^ обозначает Фурье-образ функции.

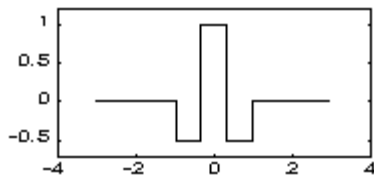
Интегральное вейвлет-преобразование обладает следующими недостатками. Во-первых, оно дает избыточную информацию при анализе сигналов из-за перекрытия носителей вейвлета, во-вторых, оно может быть проведено аналитически лишь для простейших функций, а его компьютерное вычисление требует больших временных и вычислительных ресурсов. Поэтому в приложениях обычно используется дискретный вариант, который при специальном выборе базисных функций может быть выполнен достаточно эффективно и без дополнительных затрат памяти.

Примеры часто используемых вейвлетов

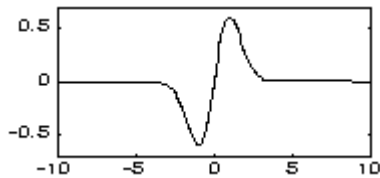
$$1. \text{ HAAR-вейвлет: } \psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$



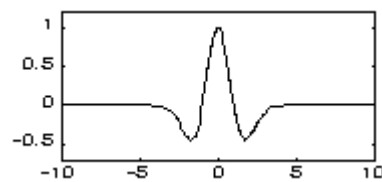
$$2. \text{ FHAT-вейвлет (French hat): } \psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



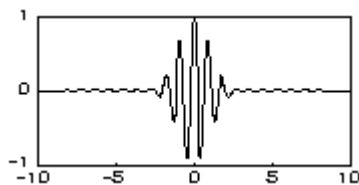
3. Wave-вейвлет: $\psi(t) = t \exp(-t^2/2)$



4. МНАТ-вейвлет (Mexican hat): $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$



5. Вейвлет Морле (комплексный базис): $\psi(t) = \exp\left(ik_0 r - \frac{r^2}{2}\right)$



12.2. Дискретизированное (дискретное избыточное) вейвлет-преобразование

Для лучшей частотно-временной локализации $\psi(t)$ должен быть отличен от нуля только в конечном интервале, называемом компактным носителем. Параметры масштаба a и сдвига b меняются непрерывно, и поэтому множество базисных функций избыточно. Для устранения этого недостатка необходима дискретизация значений a и b при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. В связи с этим для a берутся целые (отрицательные и положительные) степени фиксированного параметра $a_0 > 1$, т.е. $a = a_0^m$, причем разные значения m соответствуют разной ширине вейвлетов. В этом случае дискретизация параметра сдвига b должна зависеть от m : узкие (высокие частоты) вейвлеты сдвигаются малыми шагами, чтобы покрыть весь временной спектр, в то время как более широкие (низкие частоты) вейвлеты сдвигаются большими шагами. Следовательно, $b = nb_0 a_0^m$, где $b_0 > 0$; m, n - целые. Возможен произвольный выбор параметра b_0 , например, $b_0 = 1$. С увеличением масштаба увеличивается размер шага сдвига, так как при анализе с большим масштабом детали не так важны.

Для дискретных значений a и b вейвлет-функции представляются в виде

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m/2} t - n) \quad (12.10)$$

и образуют ортонормированный базис для квадратично интегрируемых функций на действительной оси. Свойство ортогональности позволяет получать независимую информацию на разных масштабах. Нормируемость обеспечивает сохранение величины информации на разных этапах преобразования.

Прямое дискретизированное вейвлет-преобразование сводится к вычислению коэффициентов $S_{\psi_{m,n}}$ на основе дискретизации непрерывного вейвлет-преобразования (4):

$$S_{\psi_{m,n}} = d_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m/2} t - n) s(t) dt. \quad (12.11)$$

Здесь $S_{\psi_{m,n}} = d_{m,n}$ – детализирующие коэффициенты для вейвлет-декомпозиции сигнала уровня m . Восстановление $s(t)$ из последовательности $S_{\psi_{m,n}}$ возможно в том случае, если существуют числа $A > 0$ и $B < \infty$ такие, что

$$A \|s(t)\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_{m,n}|^2 \leq B \|s(t)\|^2 \quad (12.12)$$

для всех $s(t) \in L^2(R)$, где $L^2(R)$ означает множество функций, интегрируемых с квадратом в интервале R ; $R = (-\infty, +\infty)$ – бесконечный интервал определения значений независимой переменной; $\mathbb{Z} = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ – множество целых чисел. Из (12.12) следует, что хотя реконструкция $s(t)$ из ее вейвлет-коэффициентов может не совпадать точно с $s(t)$, она будет близка к ней в смысле обеспечения минимума средней квадратической погрешности восстановления. Из (12.4) и (12.11) следует выражение для обратного дискретизированного вейвлет-преобразования

$$s(t) = C_{\psi}^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{m,n} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m/2} t - n). \quad (12.13)$$

Если базисные функции нормализованы таким образом, что $C_{\psi} = 1$, то окончательная формула реконструкции сигнала записывается в виде $s(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{m,n} \psi_{m,n}(t)$.

Дискретизированное вейвлет-преобразование наиболее эффективно в задачах сжатия сигналов и изображений, задаче очистки сигнала от шумов. Непрерывное вейвлет-преобразование в основном используется для анализа переходных процессов, обнаружения резких изменений в сигнале и исследования нестационарностей.

Особой разновидностью непрерывного вейвлет-преобразования является диадное (dyadic) вейвлет-преобразование ($a_0=2$), которое часто называют дискретным и с помощью которого согласно (12.13) при $j = -m/2$; $n=k$ любой квадратично-интегрируемый сигнал $s(t) \in L_2(R)$ может быть представлен в виде суммы

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k). \quad (12.14)$$

Важной особенностью подобной дискретизации является исключение перекрытия носителей вейвлетов, т.е. устранение избыточности в ходе вейвлет-преобразования. Выбор знака + или – при степени a_0 зависит от выбора исходного размера вейвлета – растянутый или сжатый. Если растягиваем (сжимаем) материнский вейвлет $\psi(t)$ относительно сигнала в процессе преобразования, то выбирается + (–) при степени a_0 . Индекс j является параметром масштаба и называется уровнем разрешения, индекс k является параметром сдвига. В частности, коэффициенты d_{jk} несут информацию о $s(t)$ в окрестности частоты $1/2^j$ и моменты времени $2^{-j}k$.

Частичную сумму ряда (12.14)

$$s^{j_0}(t) = \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$$

называют приближением сигнала $s(t)$ с разрешением j_0 . Сигнал можно представить в виде суммы начального приближения (т.е. приближение с некоторым начальным разрешением j_0) и оставшихся членов ряда (12.14):

$$s(t) = s^{j_0}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k). \quad (12.15)$$

Такое разложение обеспечивает многомасштабный анализ $s(t)$. Первый член ряда является грубым представлением сигнала. При добавлении к нему членов ряда степень детализации увеличивается, т.е. увеличивается разрешение, с которым представлен сигнал.

Основной задачей теории вейвлет-преобразования является доказательство того, что прямое и обратное вейвлет-преобразование способно обеспечивать реконструкцию сигнала, причем точную или хотя бы приближенную, локальную или для сигнала в целом на заданном промежутке времени. В общем случае вейвлет-преобразование на основе детализирующей ортогональной вейвлет-функции $\psi(t)$ способно восстановить, по крайней мере, тонкие детали временной структуры сигнала $s(t)$. Для восстановления полной формы сигнала необходимо прибегать к применению еще одной временной функции $\varphi(t)$, называемой масштабирующей (аппроксимирующей) или скейлинг-функцией (отцовским вейвлетом) с единичным значением интеграла

$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$), определяющей грубое приближение (аппроксимацию) и порождающей коэффициенты аппроксимации. Функции $\varphi(t)$ присущи далеко не всем вейвлетам, а только тем, которые относятся к ортогональным.

12.3 Дискретное вейвлет-преобразование

Вейвлеты, будучи функциями времени, имеют свое частотное представление или Фурье-образ. Частотное представление вейвлетов имеет важное значение и в определении фильтрующих свойств вейвлет-преобразований, и быстрого вейвлет-преобразования, основанного на пирамидальном алгоритме Малла (Mallat algorithm) и прореживании спектра

вейвлетов по частоте. В соответствии с частотным подходом к вейвлет-преобразованиям частотная область вейвлетов может быть разбита на две составляющие – низкочастотную и высокочастотную. Таким образом, Фурье-образ $\psi(\omega)$ можно представить реализацией двух фильтров: низкочастотного и согласованного с ним высокочастотного фильтра. Их частота раздела равна половине частоты дискретизации сигнала. Низкочастотный фильтр дает частотный образ для аппроксимации (грубого приближения) сигнала, а высокочастотный фильтр – для его детализации.

Быстрое вейвлет-преобразование может быть реализовано в виде каскадного соединения низкочастотных и высокочастотных фильтров или пирамидального алгоритма Малла. В этом случае полосовой фильтр для каждого масштаба состоит из пары дополняющих друг друга фильтров низких и высоких частот, относящихся к классу квадратурных зеркальных фильтров. Особенностью этого класса фильтров является то, что фильтр высоких частот получается из соответствующего фильтра низких частот простой перестановкой его коэффициентов в обратном порядке и изменением знака половины из них (только четных или только нечетных).

Процесс субполосовой фильтрации исходного сигнала $s(n)$, состоящего из N отсчетов ($N = 2^J$, где J – число масштабов или число каскадирования фильтров), может быть представлен в матричной форме дискретного вейвлет-преобразования:

$$\vec{c}_j = H_j \vec{c}_{j-1}, \quad (12.22)$$

$$\vec{d}_j = G_j \vec{c}_{j-1}, \quad (12.23)$$

где $\vec{c}_j = (c_j(0), c_j(1), \dots, c_j(N/2^j - 1))$ и $\vec{d}_j = (d_j(0), d_j(1), \dots, d_j(N/2^j - 1))$ – векторы-столбцы выходов скейлинг-фильтра и вейвлет-фильтра для некоторого j , состоящие из коэффициентов, характеризующих спектр сигнала $s(t)$ и

прореженных в два раза; $H_j = \begin{bmatrix} \vec{h}^T(1) \\ \vec{h}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{h}^T(N/2^j) \end{bmatrix}_{(N/2^j)(N/2^{j-1})}$ и

$$G_j = \begin{bmatrix} \vec{g}^T(1) \\ \vec{g}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{g}^T(N/2^j) \end{bmatrix}_{(N/2^j)(N/2^{j-1})}$$

– матрицы преобразования размером $(N/2^j)(N/2^{j-1})$ на j -й итерации, представляющие собой наборы векторов-строк $\vec{h}^T(n)$ и $\vec{g}^T(n)$ и описывающие скейлинг- и вейвлет-фильтры соответственно; $\vec{h}^T(n)$ и $\vec{g}^T(n)$ – векторы-строки, состоящие из коэффициентов, дополненных нулевыми коэффициентами, для вейвлет-фильтров и скейлинговых фильтров соответственно; $j = 1, 2, \dots, J$. В

качестве коэффициентов $c_j(n)$ на начальном значении масштаба $j=0$ принимаются временные отсчеты исходного сигнала, т.е. $\vec{c}_0 = (c_0(0), \dots, c_0(N-1)) = (s(0), s(1), \dots, s(N-1))$ или $\{c_0(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{s(kn)\}_{n=0}^{N-1}$. Итерационная процедура, описываемая выражениями (12.22) и (12.23), заканчивается при некотором значении $j=J$, которое выбирается исходя из априорной информации о сигнале, т.е. из его продолжительности. На первом шаге многошаговой итерационной процедуры производится обработка временных отсчетов сигнала $\{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$, а на каждом последующем – соответствующих коэффициентов c_j . На первом шаге вейвлетные коэффициенты $\{d_1(n)\}_{n=1}^{N/2}$ сохраняются как конечный результат, а скейлинговые коэффициенты $\{c_1(n)\}_{n=1}^{N/2}$ используются в качестве исходных данных и рекурсивно обрабатываются вплоть до конечного масштаба J . В результате рекурсивного выполнения процедуры будем иметь один вектор коэффициентов $\{c_J(n)\}$, вычисленный на последнем масштабе, и набор векторов коэффициентов $\{d_j(n)\}_1^J$, вычисленных на предыдущих масштабах.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример. Возьмем фильтр длиной $L=4$, исходный сигнал длиной $N=8$, а в качестве начального значения – $j=1$. Последовательность значений g_n получаем из h_n по формуле $g_n = (-1)^n h_{L-1-n}$, где L – длина вейвлет-фильтра.

Тогда операция матрично-векторного умножения может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \vec{c}_0 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix}, \quad (12.24)$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G_1 \vec{c}_0 = \begin{bmatrix} h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix}, \quad (12.25)$$

где H_1 и G_1 – матрицы субполосной низкочастотной и высокочастотной фильтрации размером 4×8 ; $\{h(n)\}_{n=1}^4$ и $\{g(n)\}_{n=1}^4$ – коэффициенты скейлинг- и

вейвлет-фильтров длиной 4; $\{c_0(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$ – значения отсчетов исходного сигнала.

Таким образом, выражения (12.24) и (12.25) – это один шаг дискретного вейвлет-преобразования. Эта процедура может повторяться J раз, пока длина вектора $\vec{c}_j$ не станет равна 1. Заметим, что в четвертых строках матриц (12.24) и (12.25) последовательность h_n циркулярно сдвинута: коэффициенты, выходящие за пределы матрицы справа, помещены в ту же строку слева. Это означает, что дискретное вейвлет-преобразование есть точно один период длины N вейвлет-ряда дискретного времени сигнала $\tilde{c}_{0,n}$, получаемого путем бесконечного периодического продолжения $c_{0,n}$. Так что дискретное вейвлет-преобразование, определенное таким образом, использует периодичность сигнала, как и в случае с дискретным преобразованием Фурье.

В результате применения дискретного вейвлет-преобразования (12.24) и (12.25) получаем два вектора вдвое меньшей длины, один из которых содержит сглаженную версию сигнала, а другой – набор локальных особенностей на данном уровне детализации. Данная декомпозиция исходного сигнала имеет ряд преимуществ. Во-первых, анализ сглаженного сигнала упрощает выявление его характерных свойств. Во-вторых, анализ локальных особенностей сигнала позволяет не только определить характер и параметры помех, но и четко локализовать особые точки сигнала, такие, как выбросы, резкие скачки уровня и т.д. Более того, если полученный сигнал все еще недостаточно очищен от помех, можно повторно применить к нему вейвлет-преобразование и получить еще более гладкую версию сигнала (уже в четыре раза короче, чем исходный) и локальные особенности сигнала уже на следующем уровне детализации.

Для выполнения обратного преобразования достаточно вычислить произведение транспонированных матриц коэффициентов на сглаженный вектор и вектор деталей соответственно и выполнить покомпонентное сложение результатов

$$\vec{c}_{j-1} = \sqrt{2}E_j^T \vec{c}_j + \sqrt{2}F_j^T \vec{d}_j, \quad (12.26)$$

$$\text{где } E = H_j^T \text{ и } F = G_j^T.$$

На рис.12.3. представлена блок-схема одного шага итерационной процедуры субполосового вейвлет-анализа и синтеза сигнала по его коэффициентам разложения. Согласно рис.12.3 сигнал уровня $j = 0$ разлагается на два сигнала уровня $j = 1$. Разрешение сигнала, являющееся мерой количества детальной информации в сигнале, изменяется за счет фильтрации сигнала, а масштаб изменяется за счет децимации и интерполяции. Децимация соответствует снижению частоты дискретизации, или удалению некоторых отсчетов из сигнала. Например, децимация в два раза означает удаление половины отсчетов, т.е. из сигнала удаляется каждый второй отсчет. Интерполяция соответствует увеличению частоты дискретизации сигнала путем добавления новых отсчетов между существующими. Обычно в качестве новых отсчетов используется нуль. Например, интерполяция в два раза означает

вставку нулей между каждыми отсчетами. Следует помнить, что операции децимации (прореживания) сигнала и интерполяция в 2 раза, обозначенные символами $\downarrow$ и $\uparrow$ соответственно, выполняются в матрицах H , G , E и F . В нижней части схемы (рис.3) выполняется низкочастотная фильтрация. В результате получается некоторая аппроксимация сигнала, лишенная деталей – низкочастотная субполоса. В верхней части схемы выделяется высокочастотная субполоса. Далее, дискретное вейвлет-преобразование получается путем рекурсивного применения данной процедуры к низкочастотной части. Последовательное деление субполос только низкочастотных фильтров обусловлено тем фактом, что именно низкочастотная область несет больше информации, чем высокочастотная (уточняющая) область. Дискретное вейвлет-преобразование исходного сигнала получается путем объединения вейвлетных коэффициентов всех уровней преобразования и присоединения к ним скейлинговых коэффициентов последнего уровня. В этом случае число коэффициентов равно числу отсчетов в исходном сигнале. Общее число доступных масштабов равно $\log_2 N$.

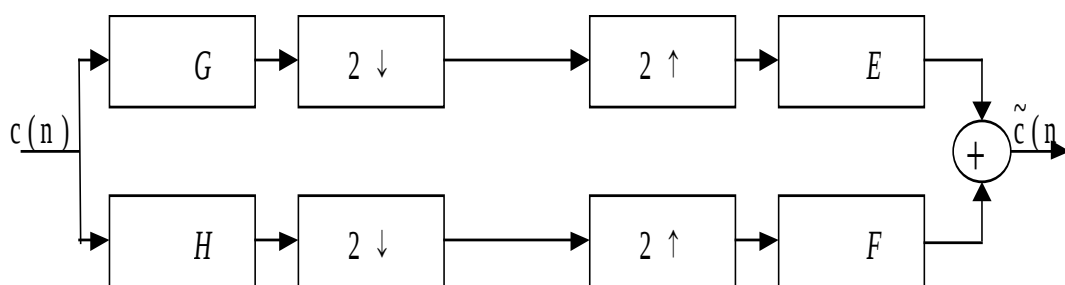


Рис.12.3. Блок-схема одного шага итерационной процедуры полосового вейвлет-анализа и синтеза сигнала на основе вейвлет-фильтрации

Число операций умножения, необходимое для вычисления всех коэффициентов дискретного вейвлет-преобразования для массива данных N и длины векторов h и g , равной L , будет $2LN$. Столько же операций нужно выполнить, чтобы восстановить или вычислить все спектральные компоненты. Следовательно, для анализа–синтеза сигнала $s(t)$ в вейвлетном базисе необходимо выполнить $4LN$ операций. Число же операций комплексного умножения для БПФ равно $N \log_2 N$, что сравнимо или даже больше, чем в случае дискретного вейвлет-преобразования.

Интерпретация коэффициентов дискретного вейвлет-преобразования несколько сложнее, чем коэффициентов Фурье. Если анализируемый сигнал дискретизирован на частоте 8 кГц и состоит из 256 отсчетов, то верхняя частота сигнала 4 кГц. Тогда коэффициенты первого уровня разложения (128) занимают полосу частот $[2,0, 4,0]$ кГц. Вейвлет-коэффициенты второго уровня (64) «отвечают» за полосу частот $[1,0, 2,0]$ кГц. Они отображаются перед вейвлет-коэффициентами первого уровня. Процедура повторяется до тех пор,

пока не останется 1 вейвлет-коэффициент и 1 скейлинг-коэффициент на 9 уровне. Всего получается $(1+1+2+4+8+16+32+64+128)=256$ коэффициентов. То есть, число коэффициентов равно числу отсчетов в исходном сигнале. Если основная энергия сигнала была сосредоточена возле частоты 1,0 кГц, то вейвлет-коэффициенты второго уровня будут большими, а вейвлет-коэффициентами первого уровня можно пренебречь.

12.4. Расчет коэффициентов вейвлет-фильтров Добеши

Свойства вейвлет-функций Добеши. Обычно в качестве параметра, определяющего выбор вида материнского вейвлета, выступает внешнее сходство вида исследуемого сигнала и функции преобразования. Исходя из этого в качестве материнской вейвлет-функции использованы вейвлеты Добеши. Это один из самых известных вейвлетов и его основные свойства таковы: 1) функции имеют конечное число нулевых значений, т.е. система вейвлетов Добеши обладает свойствами гладкости и исключения моментов; 2) функции обладают свойствами компактности носителя (т.е. быстро нарастают и быстро спадают) и ортогональности, что обуславливает возможность точного восстановления произвольного сигнала; 3) вейвлеты имеют как вейвлет-функцию, так и скейлинг-функцию, что делает возможным кратномасштабный и быстрый вейвлет-анализ. То, что вейвлеты Добеши обладают свойством исключать моменты, означает, что они хорошо подойдут для сжатия сигналов, которые имеют большие гладкие области. Скейлинг-функции $\phi_{k,j}$ и вейвлет-функции $\psi_{k,j}$ семейства Добеши удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} (\phi_{k,j}, \phi_{k,l}) = 0, \\ (\psi_{k,j}, \psi_{k,l}) = 0 \end{cases} \quad (12.27)$$

при $j \neq l$, где $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt$ – скалярное произведение двух функций

$u(t)$ и $v(t)$. Это означает, что функции в одноименном масштабе и в разных масштабах являются ортогональными. Кроме того, эти функции также удовлетворяют равенству

$$(\phi_{k,j}, \psi_{k,j}) = 0 \quad (12.28)$$

при всех j, l . Заметим, что свойство ортогональности позволяет получать независимую информацию на разных масштабах, а нормируемость обеспечивает сохранение величины информации на разных этапах преобразования.

Среди недостатков можно отметить несимметричность вейвлета Добеши. В задачах обработки речи и звука в силу особенностей слухового восприятия человека требования, накладываемые на форму спектров вейвлет-функции, достаточно высокие, что обуславливает использование большого числа нулевых моментов (15-20). Вейвлеты Добеши длиной L имеют $M=L/2$ нулевых моментов. Однако следует помнить, что число нулевых моментов определяет длительность вейвлет-функций и, значит, быстроедействие

алгоритма вычисления вейвлет-преобразования. Следует отметить, что в отличие от вейвлет-функций Добеши, вырожденные моменты скейлинг-функций Добеши не имеют нулевых значений.

В классической конструкции Добеши длина фильтров $L=2M$, а количество нулевых моментов M . Вейвлеты семейства Добеши обозначаются как dbp , где $p=M$ – порядок; db – Daubechies (Ингрид Добеши, впервые предложившей ортогональные вейвлеты, сосредоточенные на конечном интервале времени). Все вейвлет-функции Добеши имеют компактный носитель. Примерами вейвлетов Добеши с одним и двумя нулевыми моментами являются функции Добеши 1-го порядка $db1$ ($M=1$) и 2-го порядка $db2$ ($M=2$), т.е. $\int \psi(t)dt=0$ и $\int t\psi(t)dt=0$. Среди вейвлетов с компактным носителем свойством симметричности обладают лишь функции Хаара (функции Добеши $db1$).

Вычисление значений коэффициентов, составляющих матрицы H и G , основано на использовании условия ортогональности и уравнения нулевых моментов соответственно:

$$\sum_l h_l h_{l+k} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \text{ и } \sum_l s_l^p h_l = 0, \quad 0 \leq p \leq M, \quad (12.29)$$

где $2M$ – длина скейлинг-фильтра и вейвлет-фильтра.

Сдвиги масштабирующих и вейвлетных функций образуют ортонормированный базис пространства, т.е. при попарном перемножении строк матрицы преобразования получаем нуль, а при умножении строки на саму себя – единицу. Свойство ортонормированности базиса означает, что матрица обратного преобразования представляет собой просто транспонированную матрицу прямого преобразования, т.е. $H_j = H_j^T$ и $G_j = G_j^T$.

Таким образом, для нахождения значений коэффициентов вейвлет-фильтра длиной $L=4$ необходимо решить систему из четырех алгебраических уравнений: два уравнения, полученные из условия ортогональности, и два уравнения нулевых моментов.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1, \\ h_2 h_0 + h_3 h_1 = 0, \end{array} \right\} \text{ условия ортонормальности} \quad (12.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0, \\ 0h_3 - 1h_2 + 2h_1 - 3h_0 = 0. \end{array} \right\} \text{ нулевые моменты}$$

Решением этой системы являются следующие значения:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad h_0 = 0,4829629131445341; \quad h_1 = 0,8365163037378097; \quad h_2 = 0,2241438680420134; \quad h_3 = -0,1294095225512604.$$

Эти коэффициенты определяют вейвлеты, называемые вейвлетами Добеши $db2$. Исключение высших моментов приводит к системам вейвлетов Добеши с большим количеством коэффициентов. Например, $db3$ Добеши

получаются при исключении не только нулевых и первых моментов, но и вторых.

Коэффициенты для вейвлетов Добеши более высокого порядка получаются аналогичным способом, однако их точные значения могут быть получены только численно – алгебраические уравнения высокого порядка аналитически неразрешимы. Однако при увеличении числа нулевых моментов (M) растет длина фильтра ($L = 2M$), что приводит к возрастанию вычислительной сложности, которая равна LN , где N – длина блока данных.

Для фильтра Добеши длиной $L = 2M$ необходимо M равенств относительно нулевых моментов для получения единственного решения. В общем случае решения могут быть получены численно. На рис.4 приведены вейвлет-функции 1-, 2-, 3-, 4-, 8-го порядка семейства вейвлетов Добеши. Для данных вейвлетов dbM число коэффициентов всех фильтров равно $2M$. С повышением порядка (числа нулевых моментов) повышается гладкость функций. Таким образом, подбором порядка материнского вейвлета можно добиться наилучшего приближения заданного сигнала.

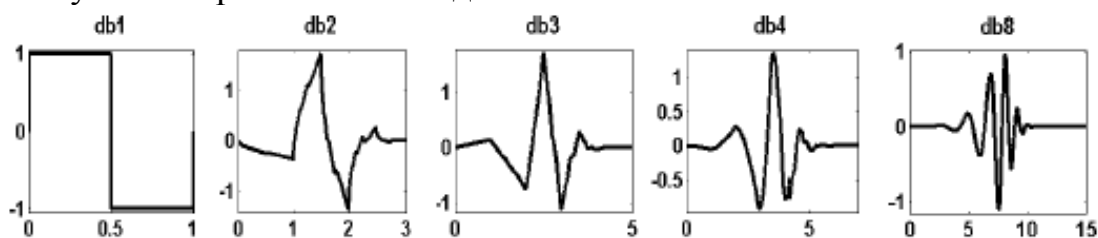


Рис.12.4. Вейвлет-функции 1-, 2-, 3-, 4-, 8-го порядка семейства вейвлетов Добеши

Вейвлет-функция $db2$, представленная на рис.6, имеет ряд интересных свойств. Она непрерывная, но не дифференцируемая. Она фактически является фракталом в том смысле, что точки, где она не дифференцируема, не зависят от масштаба. Функция равна нулю вне интервала $[0, 3]$. Нетрудно заметить, что гладкость вейвлетов возрастает по мере увеличения их номера. Одновременно растет и частота осцилляций. Эти вейвлеты имеют характерную асимметрию – нарастание функции растянуто по сравнению со спадом.

12.5. Вейвлет-преобразование как процесс фильтрации.

Сущность вейвлетного представления сигналов состоит в использовании двух видов функций приближения (аппроксимационной и детализирующей) к РС на разных временных масштабах и в разных моментах времени.

К первому виду относятся грубые функции приближения с достаточно медленной временной динамикой, т.е. достаточно гладкие по форме. Ко второму виду относятся более тонкие функции приближения с локальной и быстрой временной динамикой изменения, характеризующей локальные особенности разного порядка (разрывы, скачки и т.п.).

Таким образом, любая дискретная функция может быть представлена в виде линейной комбинации вейвлет-функций на различных масштабах и скейлинг-функции на самом большом масштабе разрешения:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k a_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \\ &= \sum_k a_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t), \end{aligned} \quad (12.31)$$

где $J = \log N$ – максимальное количество уровней декомпозиции или глубина декомпозиции, $k = 0, 1, \dots, 2^{j-1}$ – диапазон сдвигов, $a_{J,k} = \int x(t) \phi_{J,k}(t) dt$ – аппроксимационные коэффициенты на масштабе разрешения J , связанные со средними значениями РС, $d_{j,k} = \int x(t) \psi_{j,k}(t) dt$ – детализирующие коэффициенты на масштабе разрешения j , связанные с флуктуациями РС, $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$ и $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ – скейлинг-функция, имеющая низкочастотный характер, и вейвлет-функция дискретного вейвлет-преобразования, $g(n) = (-1)^n h(-n+1), n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ – высокочастотные и низкочастотные характеристики квадратурно-зеркального фильтра, симметричные относительно квадратурной частоты $\pi/2$, 2^{J-j} – число вейвлет-коэффициентов на j -м масштабе, $j = \overline{1, J}$.

В отличие от Фурье-преобразования вейвлет-преобразование позволяет с большей чувствительностью идентифицировать и классифицировать локальные изменения (кратковременные переходные особенности нерегулярного вида) РС в условиях действия шумов на основе оценки распределения энергии РС в вейвлет-области при различных уровнях разрешения.

Эффективность использования вейвлет-функций в качестве базовых функций разложения для сжатия РС зависит от их формы (четность или нечетность), доминирующей частоты и степени ее локализации во временном и частотном представлении. Преимущество вейвлет-преобразования для сжатия переходных составляющих РС определяется возможностью управлять степенью их похожести с базисными вейвлет-функциями за счет адаптивного выбора последних. В связи с этим за счет подходящего выбора базисной вейвлет-функции для качественного восстановления переходных составляющих РС требуется чаще всего лишь небольшой процент вейвлет-коэффициентов.

В частотной области вейвлет-преобразование можно представить как банк фильтров с частотными полосами, ширины которых увеличиваются с центральной частотой так, что относительные ширины полос остаются постоянными.

На рис.12.5 представлена блок-схема трехстадийного многоканального октавного банка фильтров – анализа для реализации прямого вейвлет-преобразования. Данный многоканальный банк фильтров можно рассматривать

как древовидный двухканальный банк фильтров с дециматором или интерполятором.

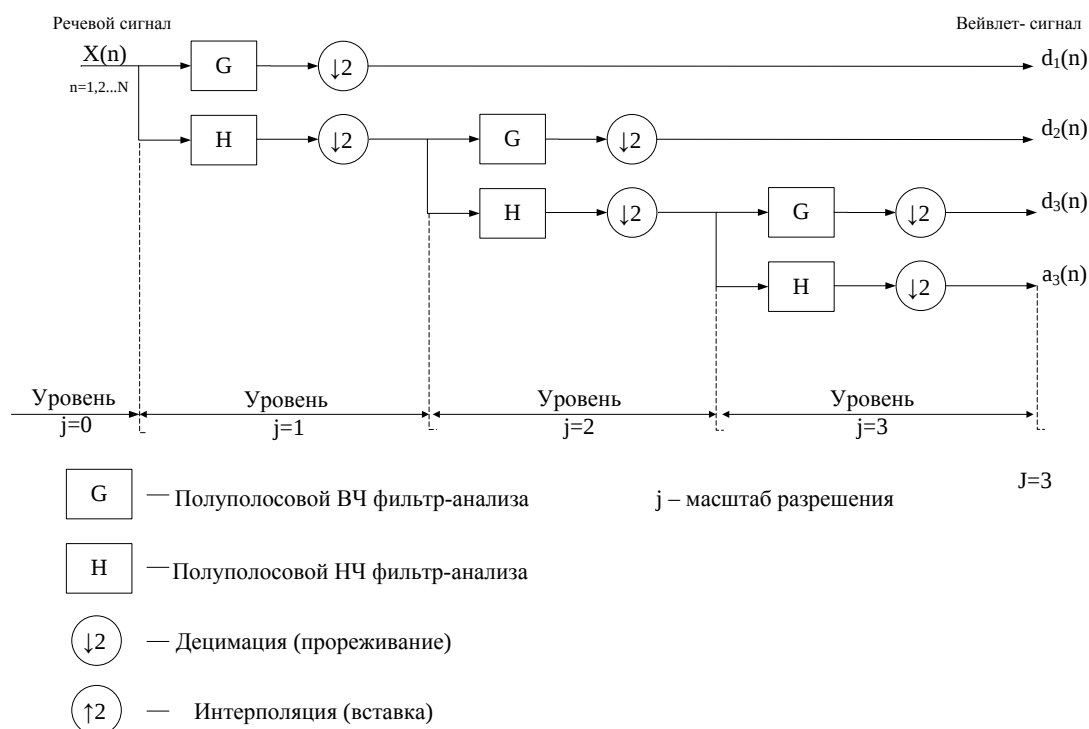
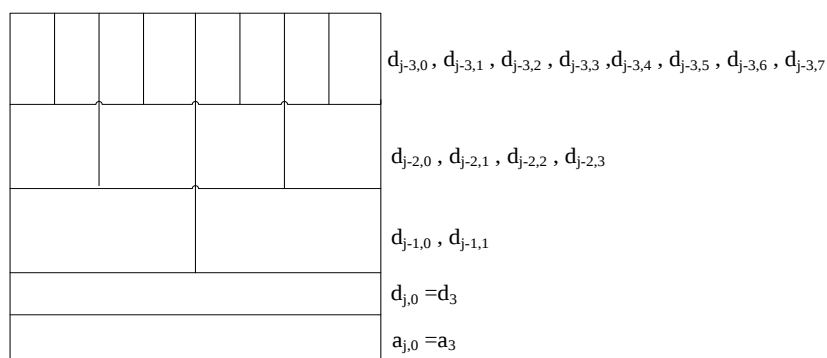


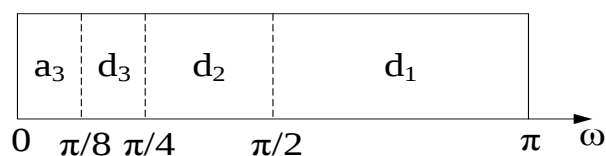
Рис.12.5. Блок-схема трехстадийного многоканального октавного банка фильтров – анализа.

Декомпозиция сигнала может быть продолжена до тех пор, пока имеется достаточно выборок для прореживания. Использование многоканального банка фильтров приводит к логарифмическому частотному разрешению: низкие частоты имеют узкие ширины полос, высокие частоты имеют широкие ширины полос.

На рис.12.6 представлено разбиение частотно-временной плоскости и частотного диапазона исходного сигнала $x(n)$, которое осуществляется с помощью блок-схемы трехстадийного многоканального октавного банка фильтров – анализа (рис.12.5)



а)



б)

Рис.12.6. Вейвлет-преобразование в плоскости время-частота (а) и неравномерное разбиение частотного диапазона исходного сигнала (б)

На рис.12.7 иллюстрация выполнения вейвлет-преобразование как субполосной фильтрации.

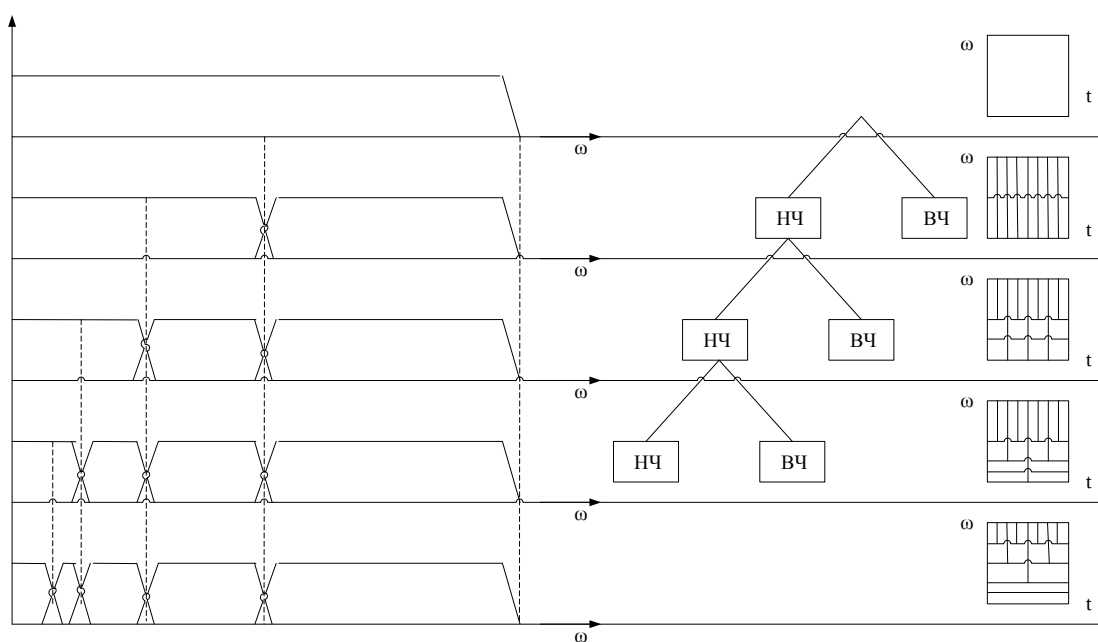


Рис.12.7. Вейвлет-преобразование как субполосная фильтрация.

Из рис.12.6.и 12.7 и таблицы 12.1 видно, что вейвлет-преобразование хорошо согласуется с моделью система слуха человека. Слуховую систему можно представить как многоканальный банк фильтров, имеющих полосу пропускания, равную ширине критических полос слуха. Слух фиксирует изменения спектральных составляющих в логарифмическом масштабе. Он распознает звуки по изменению их спектров во времени, т.е. по фонетической функции речи, пропорциональной приращению скорости изменения спектрального уровня на заданной частоте.

Таблица 12.1. Разбиение слышимого частотного диапазона на критические полосы в психоакустической модели слуховой системы

Номер критической полосы	Центральная частота, Гц	Нижняя и верхняя частоты, ширина критической полосы, Гц	
1	50	20–100	100

2	150	100–20 0	1 00
3	250	200–30 0	1 00
4	350	300–40 0	1 00
5	450	400–51 0	1 10
6	570	510–63 0	1 20
7	700	630–77 0	1 40
8	840	770–92 0	1 50
9	1000	920–10 80	1 60
10	1170	1080–1 270	1 90
11	1370	1270–1 480	2 10
12	1600	1480–1 720	2 40
13	1850	1720–2 000	2 80
14	2150	2000–2 320	3 20
15	2500	2320–2 700	3 80
16	2900	2700–3 150	4 50
17	3400	3150–3 700	5 50
18	4000	3700–4 400	7 00
19	4800	4400–5 300	9 00
20	5800	5300–6 400	1 100
21	7000	6400–7 700	1 300
22	8500	7700–9 500	1 800
23	10500	9500–1 2000	2 500
24	13500	12000– 15500	3 500
25	19500	15500– 22500	7 000

На рис. 12.8 представлена блок-схема трехстадийного многоканального октавного банка фильтров – синтеза для реализации обратного дискретного вейвлет-преобразования.

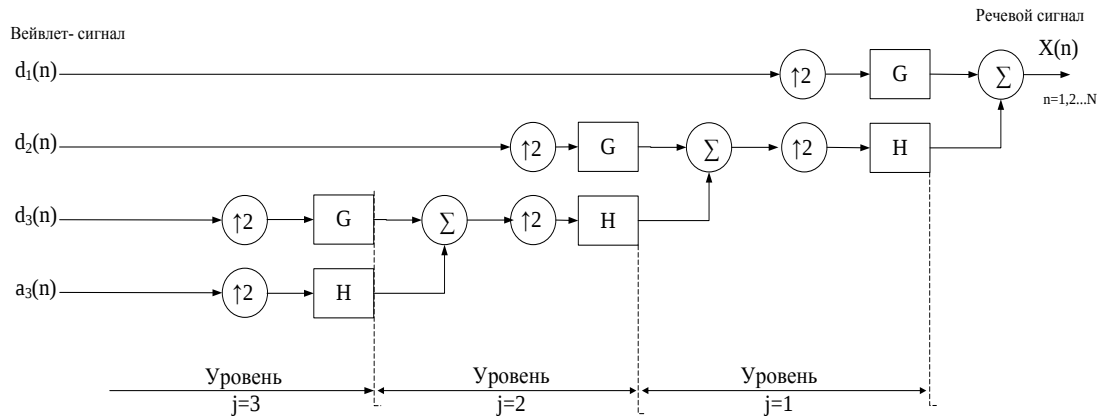


Рис.12.8. Блок-схема трехстадийного многоканального октавного банка фильтров

Вычислительная сложность дискретного вейвлет-преобразования характеризуется количеством операций, равным $4LN$ операций, где N – число отсчетов в сигнале, L – число коэффициентов импульсной характеристики фильтров-анализа и синтеза.

Виды вейвлет-функций

1) Вейвлет-функция Хаара.

Вейвлет-функция Хаара – это простейшая вейвлет-функция, имеющая большое разрешение по времени. Ее прямоугольная форма является причиной медленного затухания в частотной области, что в свою очередь приводит к неудовлетворительно большому разрешению по частоте. Математически вейвлет-функция (или детализирующая функция) $\psi(t)$ и масштабирующая (или аппроксимационная) функция $\phi(t)$ задаются следующими соотношениями

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2; \\ -1, & 1/2 \leq t < 1; \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (12.32)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1), \\ 0, & t \notin (0,1). \end{cases} \quad (12.33)$$

Графическое представление вейвлет-функции Хаара и ее масштабирующей функции дано рис. 12.9 и 12.10.

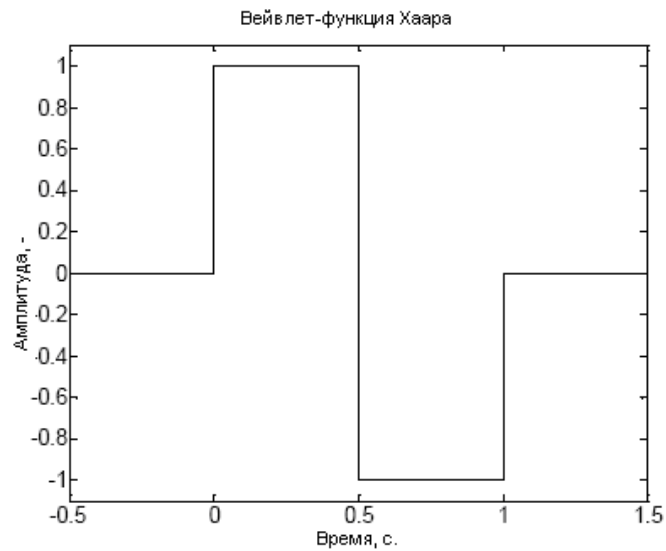


Рис. 12.9. Вейвлет-функция Хаара.

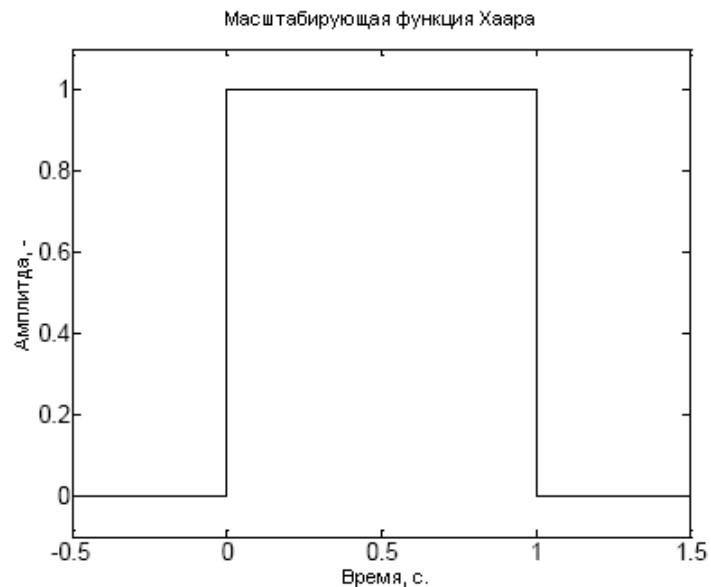


Рис. 12.10. Масштабирующая функция Хаара.

2) вейвлет-функция Добеши.

Вейвлет Добеши – ортогональные функции с компактным носителем $2N-1$, где N – порядок вейвлета. Они несимметричны. В предельном случае, при $N=1$, они сводятся к вейвлетам Хаара. Вейвлет-функции Добеши второго и десятого порядков изображены на рис. 12.11, а их масштабирующие функции – на рис. 12.12.

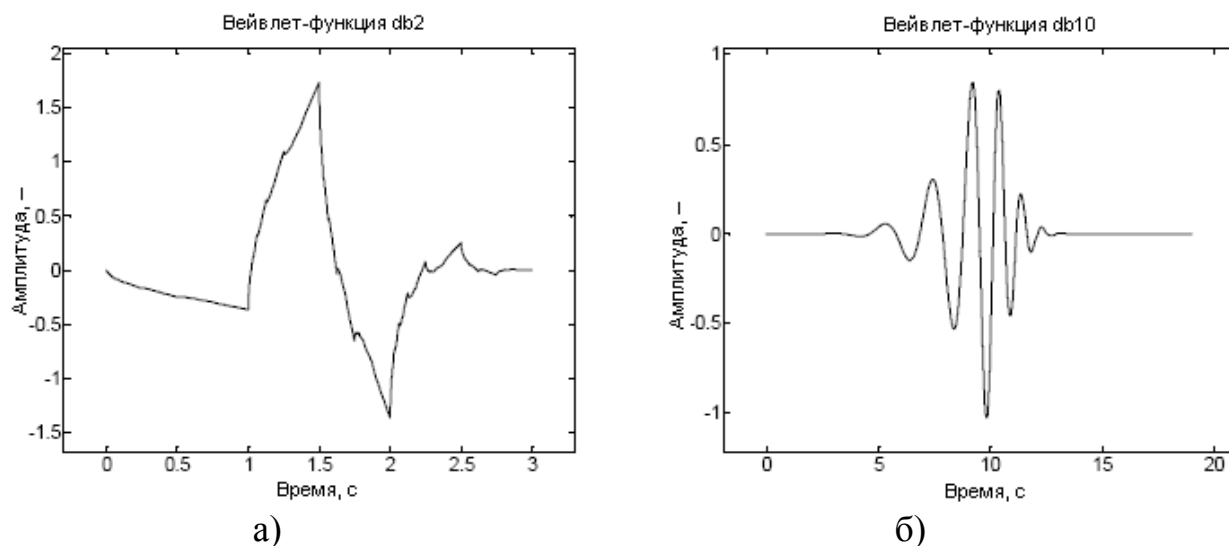


Рис. 12.11. Вейвлет-функция Добеши второго (а) и десятого (б) порядков.

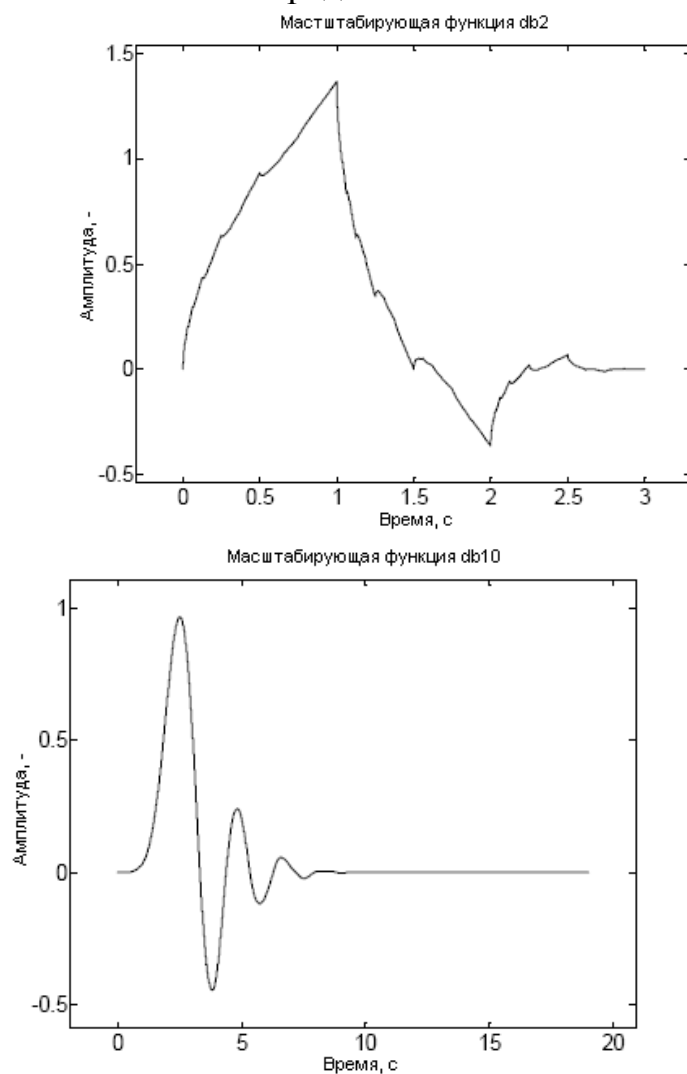


Рис. 12.12. Масштабирующая функция Добеши второго (а) и десятого (б) порядков.

3) Вейвлет-функция Морле

Вейвлет-функция Морле определяется следующим соотношением

$$\psi(t) = C e^{\frac{t^2}{2}} \cos(5t), \quad (12.34)$$

где C – нормализующая константа, необходимая для точного восстановления. Данная вейвлет-функция имеет бесконечный носитель, симметрична и не имеет масштабирующей функции. Она изображена на рисунке 12.13.

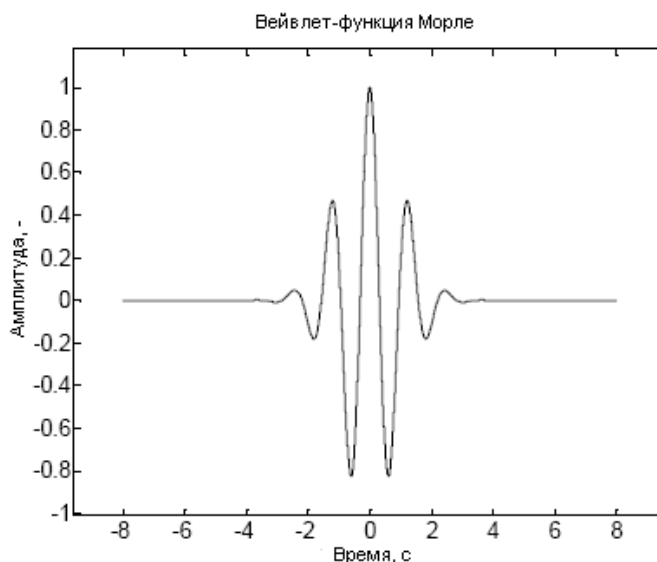


Рис. 12.13. Вейвлет-функция Морле.

Существует большое количество вейвлет-функций, кроме вышеописанных: вейвлет-функция мексиканская шляпа, семейство Койфлетов, Симлетов, биортогональные вейвлет-функции и т.д. Для их выбора целесообразно использовать оценку аастотно-временной неопределенности вейвлет-функций.

Частотно-временная неопределенность вейвлет-преобразования.

Вейвлет-функции локализованы как по времени, так и по частоте. Обозначим частотный интервал, в котором находится вейвлет-функция $\Delta\omega_\psi$, а временной интервал – Δt_ψ , называемые частотным и временным интервалом разрешения вейвлет-функции, а их произведение называется частотно-временным интервалом разрешения. Данные интервалы определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta\omega_\psi^2 &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt, \\ \Delta t_\psi^2 &= \frac{1}{E} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (12.35)$$

где $\psi_{a,b}(x) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $a \in R^+$, $b \in R$ – вейвлет-функция, a и b –

параметр временного масштаба, определяемый как (1/частота) и отвечающий за ширину вейвлет-функции, и параметр локализации или сдвига соответственно,

$\Psi(\omega)$ – Фурье-преобразование вейвлет-функции,

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 d\omega$ – энергия вейвлет-функции, $t_0 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt$

и $\omega_0 = \frac{1}{E} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\Psi(\omega)|^2 d\omega$ – величины, определяющие центры функций $\psi(t)$ и $\Psi(\omega)$ соответственно.

Временной и частотный интервалы, которые занимает вейвлет-функция с измененными параметрами масштаба и сжатия $\psi_{a,b}(t)$, определяются следующими соотношениями

$$\Delta t_{\psi_{a,b}}^2 = a^2 \Delta t_{\psi}^2 \quad \text{и} \quad \Delta \omega_{\psi_{a,b}}^2 = \frac{1}{a^2} \Delta \omega_{\psi}^2 \quad (12.36)$$

В результате произведения двух величин Δt и $\Delta \omega$ получается частотно-временная ячейка разрешения. Из (12.36) видно, что размеры окна зависят от параметра a . Площадь окна постоянна, а его форма меняется при изменении a (рис.3.10.)

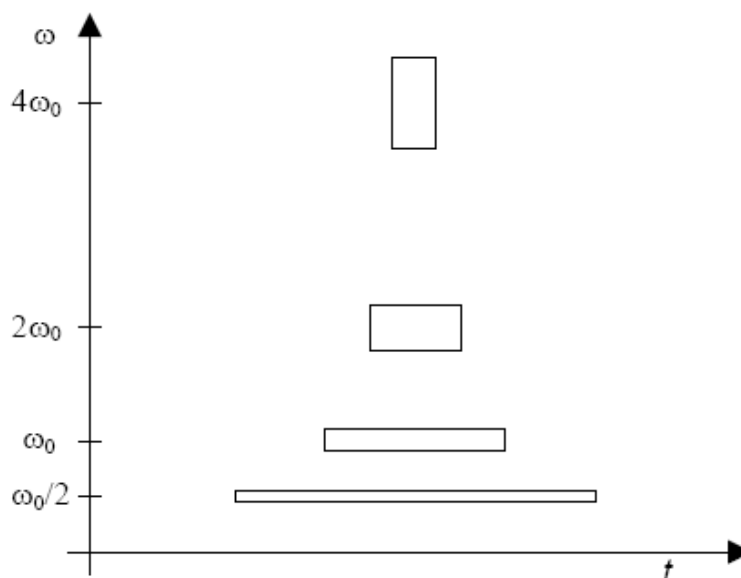


Рис. 12.14. Частотно-временная плоскость с ячейками разрешения при $a = 1/4, 1/2, 1, 2$

В таблице 12.2 приведены оценки временного, частотного и частотно-временного интервалов разрешения для различных типов вейвлет-функций.

Таблица 12.2. Частотно-временная неопределенность для различных типов вейвлет-функций

Тип вейвлет-функции	Временное разрешение Δt^2	Частотное разрешение $\Delta \omega^2$	$\Delta t^2 \Delta \omega^2$
Морле	0,7071	0,7081	0,5007
Гауссов №3	0,7416	0,6945	0,5151
Мексиканская шляпа	1,080	0,4870	0,5261
Гауссов №2	0,7637	0,6889	0,5261
Мейера	0,8418	0,9824	0,8271
Симлет №3	2,535	3,087	7,828
Добеши №3	2,535	3,087	7,828
Симлет №8	7,511	1,224	9,201
Койфлет №5	9,991	0,9881	9,873
Койфлет №2	5,512	1,877	10,35
Добеши №10	9,545	1,153	11,01
Биортогональный №6-8	8,507	1,308	11,13
Биортогональный №5-5	5,516	2,195	12,11
Добеши №2	1,540	9,424	14,51
Симлет №2	1,540	9,424	14,51
Биортогональный №3-9	9,508	1,553	14,77
Биортогональный №4-4	4,515	3,276	14,79
Койфлет №1	2,521	8,611	21,71
Биортогональный №3-7	7,511	3,490	26,21
Хаара	0,5775	130,6	75,44

Из таблицы 12.2 видно, что вейвлет-функция Хаара обеспечивает наилучшее разрешение по времени, вейвлет-функция типа мексиканская шляпа – наилучшее частотное разрешение, а вейвлет-функция Морле – минимальное значение частотно-временного разрешения.

12.6. Двухмерное вейвлет-преобразование

В настоящее время вейвлет-преобразование является одним из наиболее эффективных преобразований для сжатия изображений без потерь и с потерями. Эффективность данного преобразования обусловлена следующими свойствами: улучшенная пространственно-частотная локализация, компактность представления энергии изображения, внутри- и межполосная корреляция вейвлет-коэффициентов и уменьшение значений вейвлет-коэффициентов в высокочастотных поддиапазонах.

Для сжатия без потерь используются как специализированные алгоритмы, так и универсальные энтропийные кодеки, позволяющие создать компактное описание вейвлет-коэффициентов с пониженной скоростью передачи битовых данных.

Одномерное вейвлетное преобразование Хаара легко переносится на двумерный случай. Это обобщение весьма важно, поскольку преобразование будет применяться к изображениям, которые имеют два измерения. Здесь снова производится вычисление средних и полуразностей. Существует много обобщений этого преобразования. Здесь мы остановимся на двух подходах, которые называются стандартное разложение и пирамидальное разложение.

Стандартное разложение (рис. 12.15) начинается вычислением вейвлетных преобразований всех строк изображения. К каждой строке применяются все итерации процесса, до тех пор, пока самый левый элемент каждой строки не станет равен среднему значению чисел этой строки, а все остальные элементы будут равны взвешенным разностям. Получится образ, в первом столбце которого стоит среднее столбцов исходного образа. После этого стандартный алгоритм производит вейвлетное преобразование каждого столбца. В результате получится двумерный массив, в котором самый левый верхний угловой элемент равен среднему всего исходного массива. Остальные элементы верхней строки будут равны средним взвешенным разностям, ниже стоят разности средних, а все остальные пиксели преобразуются в соответствующие разности.

Пирамидальное разложение вычисляет вейвлетное преобразование, применяя итерации поочередно к строкам и столбцам. На первом шаге вычисляются полусуммы и полуразности для всех строк (только одна итерация, а не все вейвлетное преобразование). Это действие производит средние в левой половине матрицы и полуразности - в правой половине. На втором шаге вычисляются полусуммы и полуразности для всех столбцов получившейся матрицы.

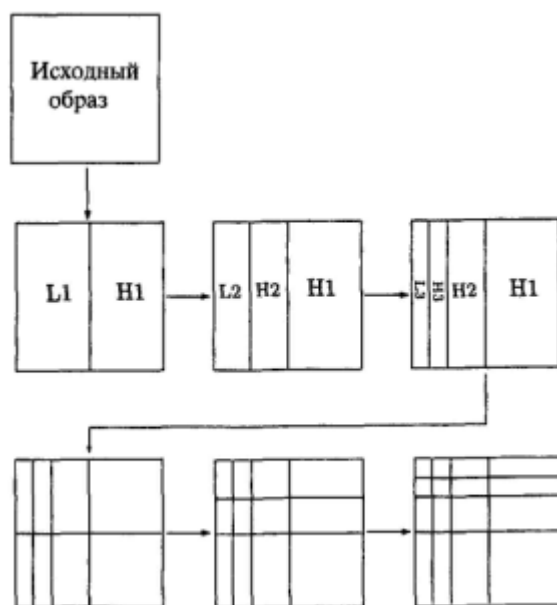


Рис. 12.15 Стандартное вейвлетное разложение.

Пирамидальное двухмерное вейвлет-преобразование (ДВП) выполняется на основе одномерного вейвлет-преобразования по строкам исходного изображения и одномерного вейвлет-преобразования по столбцам полученного промежуточного изображения.

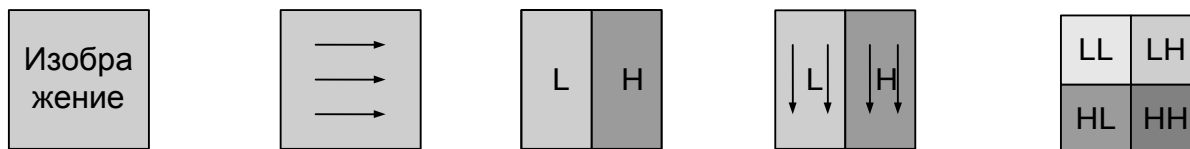


Рис.12.16 Первый уровень декомпозиции изображения на основе двухмерного вейвлет-преобразования:

L и H – промежуточные низкочастотный и высокочастотный поддиапазоны ; LL – аппроксимационный поддиапазон, LH , HL и HH – вертикальный, горизонтальный и диагональный детализирующие поддиапазоны.

Сущность ДВП состоит в многоуровневом разложении исходного изображения (рис.12.17) на самоподобные частотные поддиапазоны, причем повторно преобразуются только низкочастотные поддиапазоны LL .

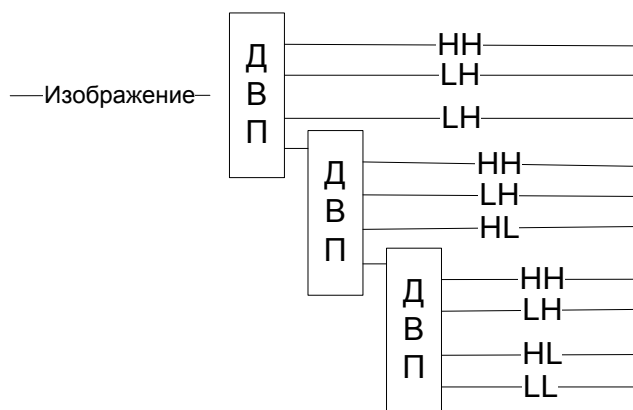


Рис.12.17 Многоуровневая декомпозиция изображения на основе дискретного вейвлет-преобразования

Число поддиапазонов определяется количеством уровней вейвлет-разложения. При 3-х уровне вейвлет-разложении структура вейвлет-коэффициентов состоит из 9 высокочастотных поддиапазонов и одного низкочастотного. Количество уровней разложения J определяется: $J = \log_2 N - \log_2 M$, где $N \times N$ – размер исходного изображения; $M \times M$ – размер области нижних частот, минимальный размер которой 1x1 пиксель. Для дискретного вейвлет-преобразования каждый уровень разложения состоит из 3-

х поддиапазонов. Последний уровень разложения состоит из одного поддиапазона нижних частот.

Для получения вещественных коэффициентов вейвлет-преобразование WT реализуется с использованием банка анализирующих вейвлет-фильтров

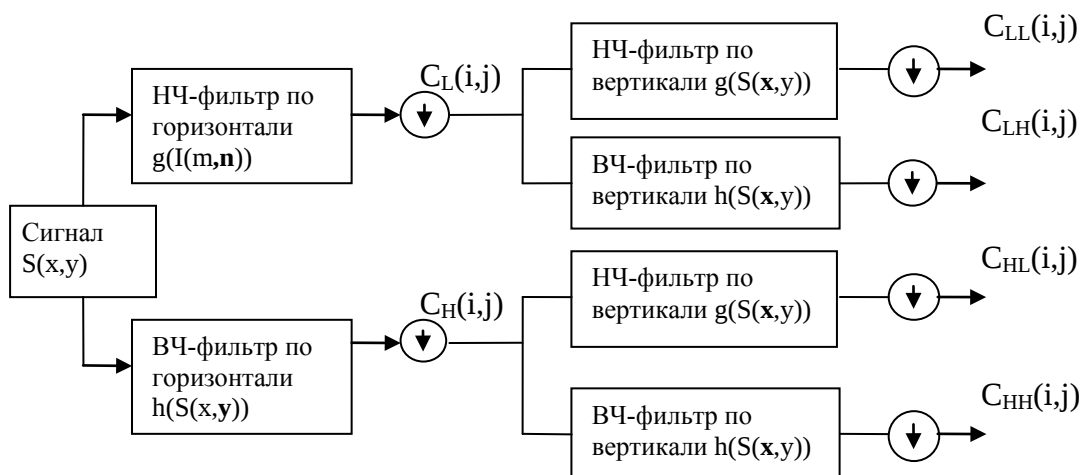


Рис.12.18 Первый уровень разложения двухмерного вейвлет-преобразования на основе банка вейвлет-фильтров

Обратное ДВП выполняется с помощью соответствующего банка синтезирующих фильтров.

Число операций умножения, необходимое при вычислении вещественных коэффициентов одного уровня разложения вейвлет-преобразования для массива данных N и длины L низкочастотного и высокочастотного фильтров анализа h и g , равно $4LN$. Использование вещественных вейвлет-коэффициентов не позволяет осуществить программно-аппаратную реализацию точного восстановления исходного изображения без потерь.

Для повышения быстродействия вейвлет-преобразования и реализации точного восстановления исходного изображения используется лифтинг-схема вейвлет-преобразования.

На рис.12.19 представлена общая лифтинг-схема первого уровня разложения изображения на основе одномерного вейвлет-преобразования.

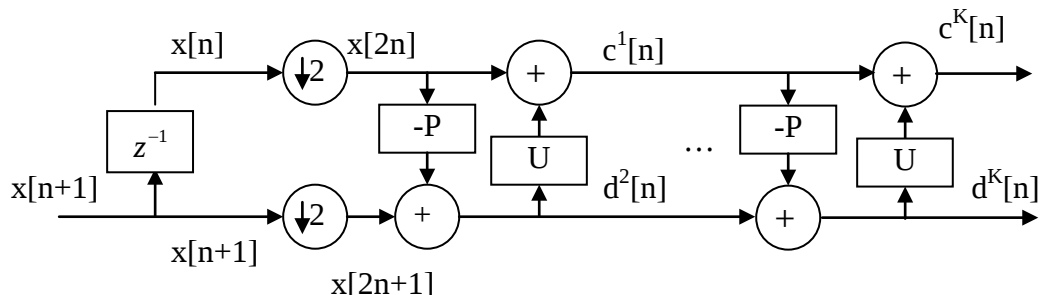


Рис.12.19 Общая лифтинг-схема первого уровня разложения изображения на основе одномерного вейвлет-преобразования

Из рис.12.19 следует, что вейвлет-коэффициенты прямого вейвлет-преобразования вычисляются с помощью следующих соотношений

$$d^{(j)}[n] = d^{(j-1)}[n] - P(c^{(j-1)}[n]), \quad (12.37)$$

$$c^{(j)}[n] = c^{(j-1)}[n] + U(d^{(j)}[n]), \quad (12.38)$$

где $c^{(0)}[n] = x[2n]$; $d^{(0)}[n] = x[2n+1]$; $P(c^{(j-1)}[n]) = \left\lfloor \sum_{k=1}^K p^{(j)}[k] \cdot c^{(j-1)}[n-k] + \frac{1}{2} \right\rfloor$ и

$U(d^{(j)}[n]) = \left\lfloor \sum_{k=1}^{K'} u^{(j)}[k] \cdot d^{(j)}[n-k] + \frac{1}{2} \right\rfloor$ – целочисленные операторы предсказания и уточнения вейвлет-коэффициентов; $p^{(j)}[k]$ и $u^{(j)}[k]$ – коэффициенты предсказания $d^{(j-1)}[n]$ и уточнения $c^{(j-1)}[n]$ по K и K' ближайшим соседним коэффициентам на j -м лифтинг-шаге соответственно; $c^{(j)}[n]$ и $d^{(j)}[n]$ – аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты вейвлет-преобразования на j -м лифтинг-шаге соответственно; $\lfloor \cdot \rfloor$ – операция округления; $j = \overline{1, N}$; N – количество лифтинг-шагов для определенного вейвлет-базиса.

Вейвлет-коэффициенты обратного вейвлет-преобразования вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$d^{(j-1)}[n] = d^{(j)}[n] + P(c^{(j-1)}[n]), \quad (12.39)$$

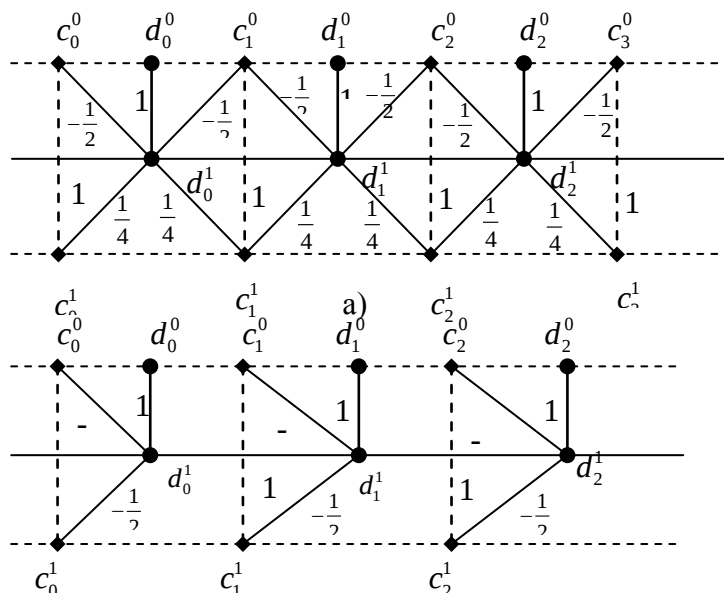
$$c^{(j-1)}[n] = c^{(j)}[n] - U(d^{(j)}[n]). \quad (12.40)$$

Для случая использования вейвлетов Добеши 5/3, Добеши 1/1 (Хаара) операции предсказания и уточнения имеют следующие параметры:

5/3: $K = K' = 2, N=1, p[1] = p[2] = \frac{1}{2}; u[1] = u[2] = \frac{1}{4}. N=1;$

Хаар: $K = K' = 2, N=1, p[1] = 1, p[2] = -1; u[1] = \frac{1}{2}, u[2] = 1.$

Графы лифтинг-схем данных преобразований представлены на рис.12.20.

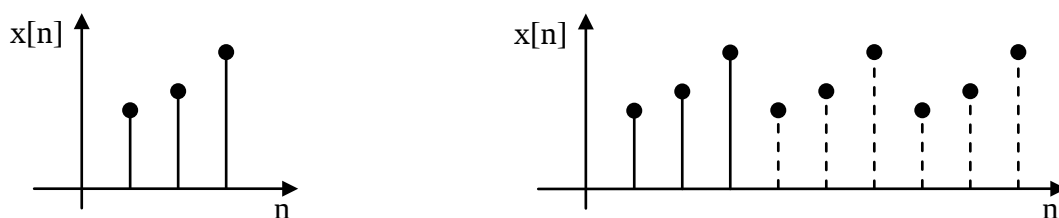


б)

Рис. 12.20 Графы лифтинг-схем вейвлет-преобразований: а) Добеши 5/3, б) Хаара

Поскольку вейвлет-преобразование предназначено для обработки неограниченных по длительности сигналов, то для обработки краевых элементов изображения необходимо использовать следующие виды расширения размеров изображения: периодическое, полупиксельное (четно-симметричное) и полнопиксельное (нечетно-симметричное), анти-симметричное.

Периодическое расширение (рис.12.21) конечного сигнала $x[n]$, $n = \overline{1, N-1}$ описывается следующим выражением: $x_{\infty}[m] = x[m \bmod N]$. Недостатком данного расширения является то, что в точках расширения для реальных сигналов неопределенна первая производная, что может приводить к появлению высокочастотных компонент в исходном изображении. Следует заметить, что в случае использования операции четного прореживания сигнала исходный сигнал должен иметь четное количество отсчетов

Рис. 12.21 Пример периодического расширения исходного сигнала $x[n]$

Одномерный симметричный сигнал может обладать как симметрией (осевая симметрия) так и антисимметрией (симметрия относительно точки). В зависимости от положения точки или оси симметрии - совпадает с отсчетом или находится по середине между отсчетами - выделяют полупиксельную и полнопиксельную симметрию соответственно.

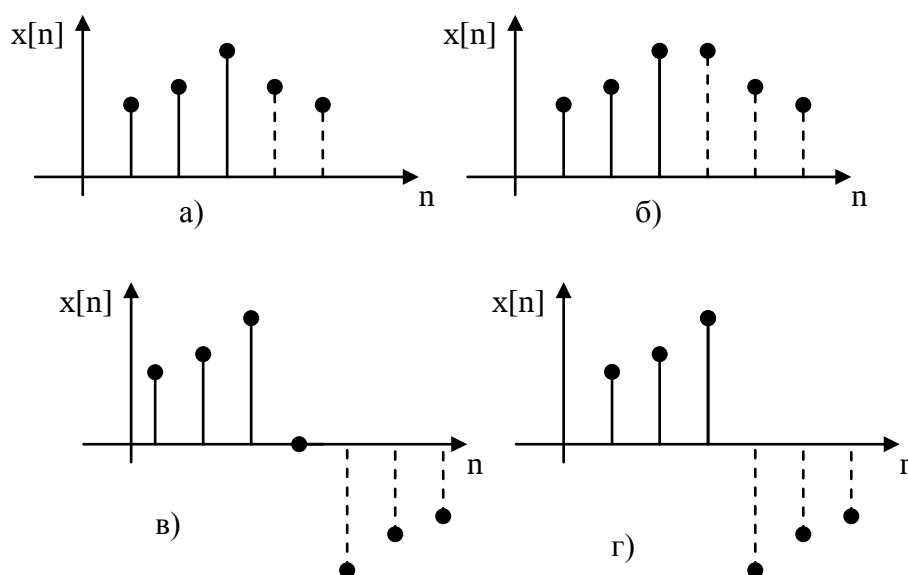


Рис.12.22 Примеры симметричных расширений исходного сигнала: (а) полнопиксельное, (б) полупиксельное, (в) антисимметричное полнопиксельное (г) антисимметричное полупиксельное

Сигнал, полученный симметричным расширением, обладает меньшими по сравнению с периодически расширенным сигналом высокочастотными составляющими.

Для уменьшения вычислительной сложности при сохранении коэффициента сжатия изображений без потерь за счет использования более коротких вейвлет-фильтров предлагается на нижних уровнях разложения использовать вейвлеты Добеши $5/3$, а на верхних уровнях вейвлеты Хаара.